

衝撃モデルによる倒立剛体の転倒限界

西原主計* 横山孝之**

Overturn Thresholds for The Inverted Rigid Body to Shock Models

Kazue NISHIHARA*, Takayuki YOKOYAMA**

To maintain the safety of products, it is important to understand the circumstance in which the rigid body turn over, and with this knowledge, to design the container hard to upset even in the shock environment. In this paper, at first using some typical shock models, computer simulations were achieved to give overturn threshold accelerations on the inverted rigid body, getting two simple equations for the threshold accelerations. The two equations were characterized in the case of the time integral area of shock wave, that is, case of the area ≥ 1 and case of the area < 1 , both of which gave good approximations to the original differential equation in a wider range of non-dimensional frequency Ω .

Secondly, the shock experiment is carried out for a steelball overturning apparatus with various cushioning pads. It was evident that the tendency of the experimental threshold accelerations coincided with that of above equations. So overturning thresholds will be presumed widely if the duration time and its integral area of actual shock are partly assumed.

Keywords: Overturn of rigid body, Overturn of container, Overturn threshold, Turn over, Fall, Upset, Shock model

製品の安全性を確保するためには、物体の転倒はどういう場合に起きるかを知ることと、その知見により転倒しにくい容器を設計していくことが重要である。

そこで本研究では、まず、各種衝撃波形のモデルを用い、剛体の転倒限界を与える計算機シミュレーションを行い、二つの簡便な転倒限界式を導いた。その簡易転倒限界式は、衝撃面積 ≥ 1 又は < 1 の場合に分けられ、無次元化振動数 Ω の広範囲にわたって、元の転倒微分方程式に対しよい近似を与えた。

次に、鋼球の転動装置と各種緩衝材による衝撃実験を行った。その実験による衝撃転倒限界加速度の特性は、上に求めた簡易転倒限界式の特性傾向に合致した。よって、衝撃持続時間・衝撃面積が幾つか推測できれば、上の簡易転倒限界式から転倒限界が推定できることが分かった。

キーワード：容器の転倒、倒立剛体、転動、倒れ、衝撃転倒

* 神奈川工科大学 (〒243-02 神奈川県厚木市下荻野1030) : Kanagawa Institute of Technology, 1030, Shimo-Ogino, Atsugi-shi, Kanagawa, 243-02 ** 二国機械工業 (株) (〒213 神奈川県川崎市高津区久地843-5) : Nikuni-Kikai Kogyo Co., 843-5, Kuji, Takatsu-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa, 213

1. まえがき

包装物輸送において、これまで輸送振動、落下衝撃、回転衝撃など、主として大振動・大衝撃に関する動力的研究がなされ、緩衝包装技術は進展してきた。しかし、輸送過程・消費者環境において、個々の製品の倒れ、躍り・衝突などの動力的研究は地味で数がないように思われる。

製品の中には瓶類、缶類のごとく脊の高いものがあり、また、積み重ねたとき倒れ易くなるものがある。加わる振動・衝撃が小さくても製品は躍り、他と衝突し、転倒する場合が見受けられる。転倒自体が直ちに製品の品質を損うものではないが、容器を傷付たり、場合によっては破損し安全性にかかわることが予想される。したがって、流通過程においても消費者環境においても、製品の安全性を最低限確保するためには、少なくとも物体の転倒はどういう場合に起るかを知ることと、その知見により転倒しにくい容器を設計していくことが重要である。

本研究では、大局的な転倒特性を得るため、まず製品及び床を剛体と考え、先に著者らが導いた転倒近似方程式¹⁾²⁾のうちすべり・躍りのない状態式に対し、計算機シミュレーションにより、各種衝撃波形のモデルを印加して物体の転倒限界を調べ、簡便な転倒限界式を導びいた。併せて各種緩衝材による鋼球の衝撃転動実験と比較し検討した。

物体の転倒問題は、包装輸送面では今後の容器設計、陳列・積み重ねなど、家庭では収納、取り扱いなど、また安全面ではプロパンガスボンベ、それらの転倒検知センサなど³⁾⁴⁾多くの分野にまたがる基本問題である。

2. 運動方程式

水平方向の加速度を受ける Fig. 1 のような転倒系を考える。同図の (a) と (b) は同一方程式系であるが、以下 Fig. 1 (a) すなわち、倒立剛体の質量を m 、重心高さを h 、上面幅を $2a$ 、底面幅を $2d$ とし、水平方向の加速度 \ddot{u} により転倒する系について調べる。重心 O から底面端 P までの距離を r 、重心を通る鉛直軸と OP との傾き角を θ 、その静止状態での傾き角を θ_0 、重心回りの回転角を α (すべり回転成分を含む)、重心の相対速度を v 、 P 点での剛体のすべり速度を v_s 、抗力を R 、摩擦力を F 、動摩擦係数を μ とし、図の矢印の方向を正にとる。 O 点、 P 点での慣性モーメントをそれぞれ I_o 、 I_p とする。 P 点において剛体の傾きが静止状態から増加する方向に ϕ をとる。重心 O が床点 P と垂直になるときを転倒限界とする。

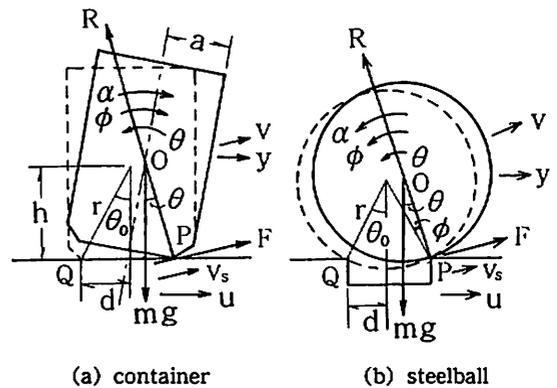


Fig. 1 Inverted rigid bodies

運動方程式を簡単化するため次の仮定を設ける。

- (1) P 点で剛体の飛び跳ねはない
- (2) 運動は左右半面で対称である

- (3) θ 、 θ_0 、 $\dot{\theta}$ などの2乗オーダーは省略できる
- (4) 摩擦は乾性摩擦則に従い、かつ $\mu < \theta_0$ とする
- (5) 端点Pでの曲率半径は考えない

ここで、すべり速度は $v_s = v - r\dot{\alpha}$ であり、 $v_s \neq 0$ で動摩擦、 $v_s = 0$ で静摩擦である。

$\theta = (\pi/2) - \beta - \phi$, $\tan \beta = h/d$, $r = \sqrt{h^2 + d^2}$ である。また、 ϕ 、 θ 、 θ_0 、 μ は小さいとして、転倒方程式は換算時間領域 τ において以下のように表される²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Omega^2 \xi'' - \xi \pm b = p \phi(\tau), \\ (\xi \geq 0 \text{ で} +, \xi < 0 \text{ で} -), \\ \xi' = e \xi' \end{aligned} \right\} (1)$$

ただし、添字の正負は θ_0 に到達した直後及び直前の値を表す。eは弾性変形、熱、音伝播等による減衰を含んだ変軸速度係数で定義され⁵⁾、回転軸が他端に移ることによる速度変化が主体をなす。時間尺度を $\tau = \nu t$ 、 τ' を τ に関する微分、 $\omega_0^2 = g/r$ 、 $\Omega = \nu/\omega_0$ と置いて、 $\xi = \phi/\theta_0$ 、初期荷重定数 $b = 1 - \mu/\theta_0$ 、 $p = u_0/g\theta_0$ 、 u_0 を加速度振幅、 $\phi(\tau)$ を最大1及び持続時間 π なる外力関数、例えば、半正弦波では ν を加振振動数として、 $\phi(\tau) = \sin \tau$ である。変位の最大 $|\xi|_m = b$ のときを転倒限界とする。システムは振動数比 Ω と転倒感度 p/b で特徴付けられる。なお、式展開は【付録】を参照。

3. 実験

Fig. 1 (b) において、鋼球 $m = 28.1g$ 、その半径 $r = 0.951cm$ 、アルミ台の溝半径 $d = 0.34cm$ 、摩擦係数(鉄・アルミ) $\mu = 0.001^{6)}$ とし、静止状態の傾き角 $\theta_0 = 0.365rad$ 、 $b = 0.997$ 、 $\omega_0 = 32.1$ である。この装置と加速度

ピックアップを台車に載せ、衝突面に各種形状・厚さの発泡ウレタンフォーム(以下スポンジと略す)、発泡スチロール、エアキャップ、ゴムシート、丸めたチリ紙及びそれらの組み合わせによる緩衝材を置き、台車をゴム紐で引っ張り衝突させる。鋼球の転がり上がり点を見ながら、加速度波形とそのピーク値をオシロスコープで読み取り Fig. 2を得た。

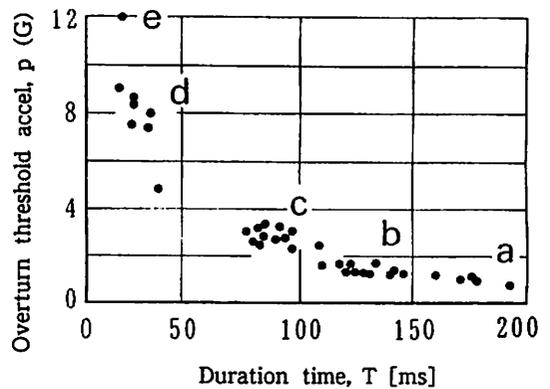
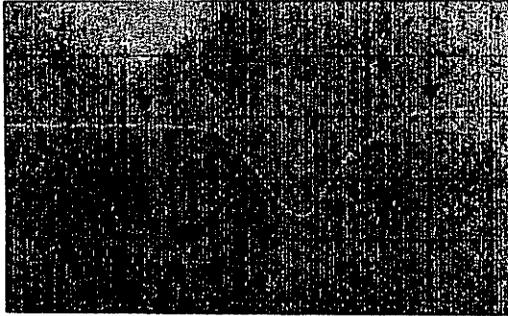


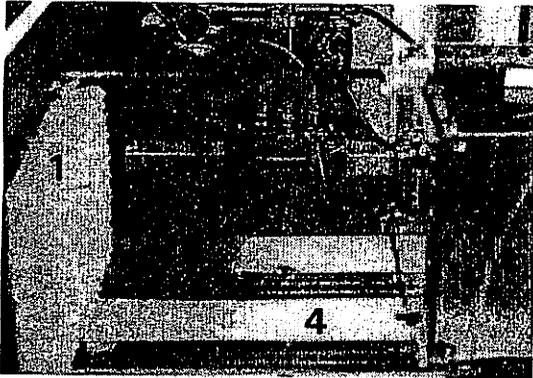
Fig. 2 Experiment on shock overturning

Fig. 2から、衝撃加速度 G (G は重力加速度を1単位とする)は、実時間領域での衝撃持続時間 T が小さいときは緩衝材の材質、形状により1G程度ばらつくが、 T が大きくなるにつれて緩衝材に依存せず、ばらつきは小さくなっている。全体の傾向として、転倒限界が一つの単調な曲線の回りにばらついているように見られるし、また、剛体の転倒限界が衝撃持続時間又はその時間積分など、材質による衝撃関数に依存しているようにも見られる。

材質的にはaはスポンジをちぎったものか又はそれとエアキャップの重ね合わせ、bはスポンジ単体又はチリ紙を丸めたもの、cはエアキャップ単体、又は発泡スチロールとスポンジの重ね合わせ、dはゴムシート又はそ



(a) shock wave
0.5G/div, 20ms/div (exp. No.1)
symbol ▼ : start and stop of impact



(b) apparatus
1: polyurethane foam cushion
2: steelball and accelerometer in the box
3: trigger equipment
4: guide

Fig. 3 Shock wave and apparatus

れと発泡スチロールの重ね合わせ、eは発泡スチロール単体などである。

なお、Fig. 3は衝撃値2.6G、持続時間 $T = 54\text{ms}$ のときの加速度波形と緩衝材である。その加速度波形は正弦波n乗型のように見えるが、実際に衝突している時間はこれより2倍程度長い。

4. 数値シミュレーション

ここでは、剛体の転倒限界を数式化するた

め、第2章に得られているところが「転倒方程式」を整備し、設計などに应用するため、より見通しのよい簡易転倒限界式を導くこととする。まず、換算時間領域の式(1)において、倒れ限界は、

$$\xi = b, \xi' = 0 \quad \tau = \tau_m \quad (2)$$

ただし、実時間領域の T は換算時間領域において $\tau_m = \pi$ である。このときの式(1)を以下のような範囲に分ける。すなわち、

(1) $\Omega \ll 1$ のとき：

式(1)は $-\xi \pm b \approx p \phi(\tau)$ となり $\xi = b$ のオーダーであるから、 p は0に近づく。

(2) $\Omega < 1$ で $\Omega \xi'' \approx \xi$ の範囲：

このときは $p \approx b$ となる。数値計算でもこのような範囲がある。

(3) Ω が1の近傍ないしそれ以上で十分大きい範囲：

式(1)を直接積分し、

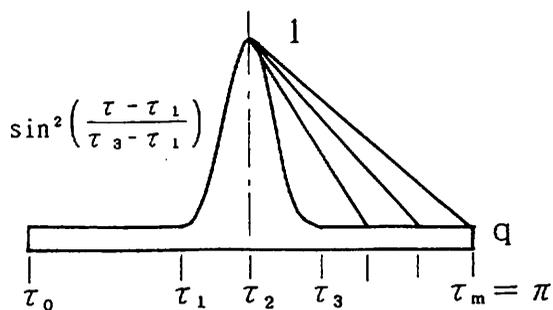
$$\begin{aligned} \Omega^2 \xi' \Big|_0^{\tau_m} + \int_0^{\tau_m} (-\xi \pm b) d\tau \\ = p \int_0^{\tau_m} \phi(\tau) d\tau = ps \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、式(3)の右辺の積分値、すなわち p の係数を衝撃面積 s と定義する。左辺第1項は零、したがって、左辺第2項は倒れ限界において Ω と s の関数 $C(\Omega, s)$ となっていると考えられる。そこで、

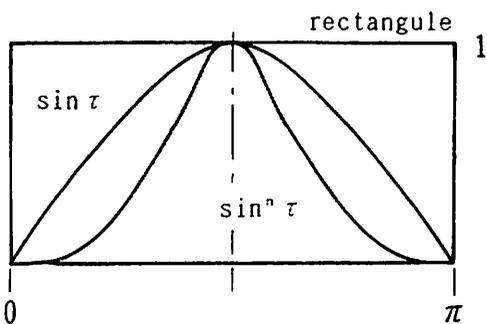
$$ps = C(\Omega, s) \quad (4)$$

と置く。上の範囲(1)、(2)は特定できないので、(3)によって式(4)に従う簡易転倒限界式を求める。

Fig. 4に今回シミュレーションに用いた衝撃波形のモデル、Table 1にそれらの衝撃面



(a) short jerk with small and long offset for No.1 to 7 and 31 to 33



(b) large impluse with short rise time for No.8 to 11

Fig. 4 Models of normalized shock acceleration

積sを示す。まず、その衝撃 $\psi(\tau)$ を式(1)に印加し、Runge-Kutta-Gill法で計算した結果がFig. 5である。図中の番号はTable 1に対応している。なお、番号31、32、33の特性はそれぞれ番号5、6、7に近いので作図を省略した。

次に、Fig. 5からps、s、 Ω の関係を取り出したところFig. 6となった。Fig. 6から大まかに、 $s < 1$ では (Ω/s) の因子が支配的であり、 $s \geq 1$ ではその因子に (s/Ω) の因子が加算されていることを見出した。そこで、 $s < 1$ に対しては第1近似

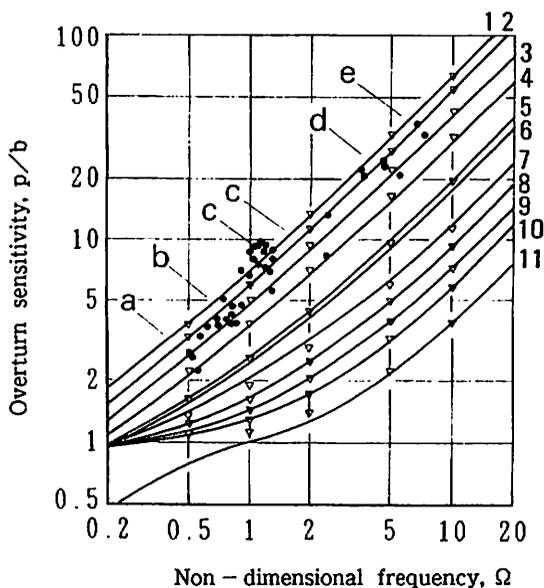


Fig. 5 Overturn threshold accelerations calculated, simulated and experimented

solid line : calculated from eq.(1)
 ● : experimented and
 ▽ : simulated by eq.s (5) and (6)

Table 1 Normalized shock model

No.	s	τ_1	τ_3	q	n	comments
1	0.1728	$5\pi/11$	$6\pi/11$	0.01		
2	0.2042	$4\pi/9$	$5\pi/9$	0.01		
3	0.2536	$3\pi/7$	$4\pi/7$	0.01		
4	0.3424	$2\pi/5$	$3\pi/5$	0.01		
5	0.5798	$\pi/3$	$2\pi/3$	0.01		
6	0.6544	$\pi/3$	$2\pi/3$	0.05		
7	1.047	$\pi/3$	$2\pi/3$	0.2		
8	1.178	0	π		4	sine^4
9	1.571	0	π		2	sine^2
10	2.0	0	π		1	sine
11	3.142	0	π			rectangular
31	0.4791	$3\pi/7$	$5\pi/7$	0.01		similar to 5
32	0.5610	$3\pi/7$	$6\pi/7$	0.01		similar to 6
33	0.7854	$3\pi/7$	$7\pi/7$	0.01		similar to 7

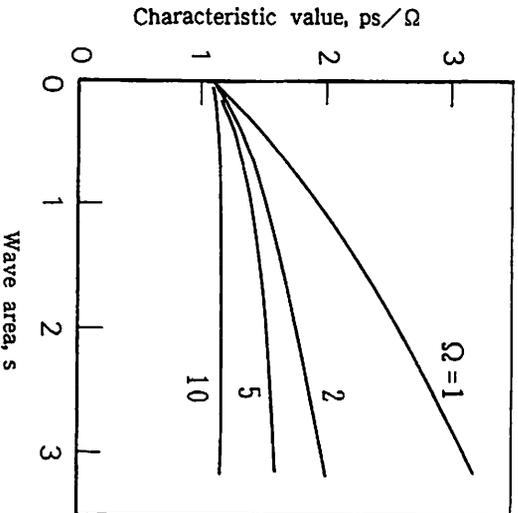


Fig. 6 Relations among p, s and Ω

$$p = a_0 + a_1 \frac{\Omega}{s} \quad (5)$$

$s \geq 1$ に対しては第2近似

$$p = a_0 + a_1 \frac{\Omega}{s} + a_2 \frac{s}{\Omega} \quad (6)$$

と置き、番号 (1~6) の組、(5~11) の組に分けて、それぞれの s と $1 \leq \Omega \leq 10$ での p 値をランダムに与え、カーブファイットを行ったところ、係数 a_i が Table 2 のように得られた。それらの近似式から p を再計算し、Fig. 5 にプロットした (▽印)。

なお、簡略化の意味から、現在のところこの二つの簡易式を与えるのが適当である。それらを統合するためには、因子を増やさなければならぬ。

Table 2 Coefficients of approximated equations (5) and (6)

coeffs.	a_0	a_1	a_2
1st approx.	0.652	1.10	—
2nd approx.	0.675	1.02	0.040

5. 考 察

Fig. 2 の実験値を式 (1) 下の無次元化によって計算し、Fig. 5 に再掲した (●印)。実験値全体の傾向としては、シミュレーション曲線の番号 1、2、3 のグループの範囲内にあることが分かる。詳しく見ると番号 1、2、3 の特性に沿って、プロットがそれぞれ左下から右上へとつながっているように見える。実験値 Fig. 2 だけでは緩衝材の材質や衝撃波形の違いが特定できないが、Fig. 5 からは、ある程度それらの違いが読み取れ、それぞれの曲線によって緩衝材の柔硬が推定できるようになった。柔らかい緩衝材は衝撃持続時間 T が長くなり、衝撃面積 S が大きく、かつ転倒衝撃加速度 p が小さいため、図の左下部分にプロットされる。

Fig. 3 から本研究で用いた衝撃持続時間 $T = \tau_m / \nu$ を正しく読み取るには熟練を要する。しかし、 T の読み取り誤差が大きいとしても、それから計算される Ω と測定された p の組は Fig. 5 のどれかのシミュレーション曲線に乗るため、測定していない点での転倒衝撃値は類推可能である。

簡易化した転倒方程式から、計算機シミュレーションにより、その転倒方程式にフィットしつつも、さらに簡易化した二つの転倒限界式を導いた。衝撃面積が計算できる場合には、この近似式により、剛体の転倒限界を知ることが可能、かつ、安全率を見込んだ設計が可能であると思われる。

6. 結 論

衝撃転倒限界を考慮した製品・包装物の設

計に資するため、衝撃に対し剛体の転倒限界を与えるシミュレーションを行い、かつ、数種の緩衝材による鋼球の衝撃転動実験を行い、以下の結論を得た。

(1) 転倒方程式を数値解析し、衝撃面積 ≥ 1 及び < 1 の場合に分けて簡易転倒限界式を導いた。それらは無次元化振動数 Ω の広範囲にわたって、元の微分方程式に対しよい近似を与える。

(2) 鋼球の転動装置と各種緩衝材による衝撃実験において、その衝撃転倒限界値の特性は、シミュレーションによる簡易転倒限界式の特性傾向に合致した。よって、衝撃持続時間・衝撃面積が分かれば、簡易転倒限界式から転倒限界が推定できる。

おわりに

本論では剛体の転倒限界の内すべり・躍りのない場合に限定したが、ほかにも、容器底形状、積み重ね、内容物の揺れ、台の材質など転倒に関係する因子は多いと思われる。今後の研究の発展が期待される。

[付録]

Fig. 1 の剛体の重心 O の運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v} &= -mr\ddot{\theta} = -m\ddot{u} \cos \theta - mg \sin \theta + F \\ m\frac{v^2}{r} &= mr^2\dot{\theta}^2 = -m\ddot{u} \sin \theta + mg \cos \theta - R \end{aligned} \right\} \quad (a1)$$

重心 O 回りの回転運動方程式は、

$$I_0 \ddot{\alpha} = -Fr \quad (a2)$$

衝突による減衰力は方程式に入れなくて次の条件で与える。

$$\dot{\theta}_+ = e \dot{\theta}_- \quad \text{at } \theta = \theta_0 \quad (a3)$$

添字の正負は θ_0 に到達した直後及び直前の値を表す。仮定の (4)、(3) により式 (a1) は

$$\begin{aligned} mr\ddot{\phi} &= -m\ddot{u} (\cos \theta + \mu \sin \theta) \\ &\quad - mg (\sin \theta - \mu \cos \theta) \end{aligned} \quad (a4)$$

ここに ϕ と θ の関係は

$$|\phi + \theta| = \theta_0, \quad \phi \theta > 0 \quad (a5)$$

であるから、 θ を ϕ に置き換え、 $\theta > 0$ で

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \sin (\theta_0 - \phi - \mu) \\ &\quad + \mu \cos (\theta_0 - \phi - \mu) \\ \cos \theta &= \cos (\theta_0 - \phi - \mu) \\ &\quad - \mu \sin (\theta_0 - \phi - \mu) \end{aligned} \right\} \quad (a6)$$

の近似を与える。本文のパラメータにより次の近似方程式

$$\begin{aligned} \Omega^2 \phi'' + \sin (\theta_0 - \phi - \mu) &= \\ -\frac{u''}{g} \cos (\theta_0 - \phi - \mu) &\end{aligned} \quad (a7)$$

となる。さらに本文の無次元化と、仮定 (2) を用いて式 (1) を得る。

<引用文献>

- 1) 西原主計、精密機械、44 (2), 185 (1978)
- 2) 西原主計、奥田欽、和田充雄、渡辺健朗、製品科学研究所報告、第87号、51 (1979)
- 3) 西原主計、渡辺健朗、奥田欽、和田充雄、製品科学研究所報告、第80号、1 (1977)
- 4) 西原主計、精密工学会誌、59 (2), 323 (1993)
- 5) 木村隼、飯田汲事、地震、6 (3), 125 (1934)
- 6) 日本機械学会、“機械工学便覧”、第5章、p.3-35 (1968)

(原稿受付 1994年3月16日)

(審査受理 1994年8月10日)