

両面段ボールに対する均質化解析とベイズ推定を用いた確率的妥当性評価技術の開発

島村 雅彦*, 江澤 良孝**, 田村 善昭***,
高清水 聖*, 佐藤 大亮****

Development of Homogenization Analysis and Probabilistic Validation Assessment Technology Using Bayesian Inference for Single Wall Corrugated Fiberboards

Masahiko SHIMAMURA*, Yoshitaka EZAWA**, Yoshiaki TAMURA***,
Satoru TAKASHIMIZU* and Daisuke SATOU****

ボールに数値解析を適用する場合、その構造が周期性を有するため均質化解析は有効な手法である。しかし、均質化解析は3方向に周期性をもつ構造に対して理論が成り立つため、両面段ボールに均質化解析を適用した場合、解析結果の変位が負荷試験の変位測定値と合わないことが知られている。本論文では測定値を利用して、両面段ボールに均質化解析が適用できる弾性係数を算出する方法を提案する。一方、提案による弾性係数は測定値のばらつきを含む。解析結果を有効に活用するには、このばらつきを評価する必要があるため、弾性係数の妥当性検証としてベイズ推定を利用した確率論的評価を行う。ここでは、推定精度向上を目的に情報量基準を用いてハイパーパラメータを最適化する方法を提案する。本論文では以上に述べた2つの提案から、両面段ボールに適用可能な弾性係数を算出し、得られた弾性係数のばらつきをベイズ推定により精度よく推定できることを示す。

Homogenization analysis is effective for the analysis of corrugated fiberboard which has periodic feature. As homogenization analysis theoretically assumes periodicity in three directions, results of homogenization analysis for single wall corrugated fiberboards are reported to have unignorable discrepancy with measurements. In this paper, we propose a method to obtain elastic moduli for single wall corrugated fiberboards in homogenization analysis, utilizing measurement data. Obtained elastic moduli include variations. In order to estimate these variations, probabilistic assessment method using Bayesian inference is applied to validate the elastic moduli. In this paper, we propose a method to optimize hyper parameter of Bayesian inference using information criterion for highly accurate estimation. In this paper, we show the two proposal leads to the elastic moduli applicable for single wall corrugated fiberboards and to the highly accurate estimation of their variations using Bayesian inference.

キーワード : 両面段ボール、均質化解析、妥当性検証、ベイズ推定

Keywords : Single wall corrugated fiberboard, Homogenization analysis, Validation, Bayesian inference

* 連絡者(Corresponding author), 東洋大学大学院工学研究科(〒350-8585 埼玉県川越市鯨井 2100)

2100 Kujirai, Kawagoe City, Saitama, 350-8585, Japan, Email: s46a01310013@toyo.jp

** 東洋大学計算力学研究センター客員研究員

*** 東洋大学総合情報学部

**** カネパッケージ(株)

1. 緒言

段ボールは優れた力学的構造の特徴をもち、段ボール箱や緩衝材として活用されている。段ボールの既存研究は数多く存在し、例えば松島ら¹⁾の強度に関する基礎的研究がある。近年、設計段階において数値解析を活用することの意義は大きくなっており、効率的に製品開発を行うことの一助となっている。段ボールを対象とした数値解析の既存研究として、中川ら^{2),3)}は、段ボールに対して有限要素解析が適用可能であるか動的解析を行なうことで検討を行っている。ここでは、段ボールシートを一様な単一素材と捉えたシェル要素で簡易モデル化し、物性データは段ボールシートの状態から測定した値を用いている。さらに、簡易モデルによる段ボールの緩衝材基本モデルおよび木箱を用いた包装品モデルについても検討を行っている。また、三上⁴⁾らは、垂直圧縮試験の有限要素解析を行なうことで最適なフルート形状を検討している。この解析では、ライナと中芯の物性に対して等方性弾塑性を仮定し、原紙の抄紙方向のリングクラッシュ試験から得られた応力-ひずみ曲線に、2直線近似より得られた弾性率、降伏応力、接線係数を適用した非線形解析を実施している。

段ボールは、その形状が複雑であることから一般的な有限要素解析を用いた場合、節点数および要素数が多くなることで、メモリーの負荷やそれに伴い解析にかかる計算時間が極めて高くなる。そのため、段ボールの周期性に着目した均質化解析⁵⁾の適用が試みられ

ている。均質化解析は3次元問題に適用するにあたり、3方向に周期性を有する構造体を対象として理論が成立している。そのため、厚さ方向に周期性のない両面段ボールに均質化解析を適用すると、無視し得ない誤差が生じることが報告されている⁶⁾。しかし、解析の大幅な効率化を考慮すれば実用上有用な解析手法であるといえる。平板を対象とした均質化理論の適用は、連続体をモデル化したミクロスケールの問題に対して Bernoulli-Euler の仮定などに基づいた平板の運動場を導入する方法⁶⁾や漸近展開に基づく定式化⁷⁾などが試みられている。

本研究では、従来の均質化解析に対して数学的理論に基づいた解の漸近展開から始まる式展開や厚板の面内周期性に関する数学的処理を行うなどすることなく、両面段ボールに均質化解析を適用する方法を提案する。既存の研究^{2),3),4)}では、単一のシェル要素によるモデル化や段ボールの形状対称性を利用した詳細モデルの簡略化により節点数、要素数を低減するに留まっており、均質化解析の活用はなされていない。本研究では均質化解析を用いることで、効率的かつ高精度な解析を行うことを目的とする。

2. 提案手法の概要

本研究では両面段ボールを対象に以下に述べる2つの手法を提案する。ここでは、その特徴について述べる。

2.1 両面段ボールの数値解析

2.1.1 均質化解析適用の問題

均質化解析の数学的理論は、空間的に周期変動する係数をもつ微分方程式において、その解の漸近挙動を記述するものである。そのため、面内にのみ周期的な非均質性を有する両面段ボールに直接適用すると解析結果の変位に無視し得ない誤差が生じる。近年、平板に対する均質化解析の研究が進められているが、現状では解決に至っていない⁸⁾。

2.1.2 弾性係数の適用方法

前節で述べた問題を解決するため、本研究では曲げ剛性を定義する弾性係数に着目し、測定された変位に均質化解析の変位が合うよう弾性係数を調整する方法を提案する。尚、提案により算出された弾性係数を本論文では調整済み弾性係数と定義する。

2.2 ばらつきの確率的評価法

測定値は様々な要因でばらついており、その測定値に合わせるように均質化解析を行なうため、算出された調整済み弾性係数も同様にばらつきを含む。このようなばらつきを評価する方法論としてベイズ推定^{9),10)}がある。

ベイズ推定は、設計者の主観を反映した事前確率密度関数(以後、事前分布)を有効に活用することで、少ない観測データからでも比較的良い推定を行なうことが可能である。すなわち、推定の対象となるパラメータに対して確信度の高い事前分布を定義することが可能であれば、精度の高い推定が可能となる。

そこで、本研究では事前分布の最適な確率モデルを選択する方法論として情報量基準 WAIC(Widely Applicable Information Criterion)^{11),12)}を用いることで、事前分布の上層部に属するハイパーパラメータを最適化する方法を提案する。このハイパーパラメータは、事前分布に対する事前分布を意味するものであり、ハイパーパラメータから事前分布を推定することが可能である。このように情報量基準 WAIC によって推定された事前分布を用いることで調整済み弾性係数のばらつきを精度良く推定できる。

3. 試験

調整済み弾性係数は、試験と均質化解析から算出される値である。ここでは、そのための曲げ試験について述べる。

3.1 曲げ試験

本研究では表裏ライナ LB180、中芯 MC120 から成る B-flute を供紙材として曲げ試験¹³⁾を行った。LB180 と MC120 は JIS P 3902、JIS P 3904 に準拠したものである。また、試験片は、温度 11°C、湿度 38% の条件で前処理を施した。Fig.1 には曲げ試験装置を示すが、測定は試験片の両端を治具で完全に固定し、圧子により圧縮速度 10mm/min で鉛直方向の荷重を与え、段ボールシートから 300×300mm の寸法に切り抜いた試験片の段が完全に潰れるまでの荷重-変位特性を測定した。

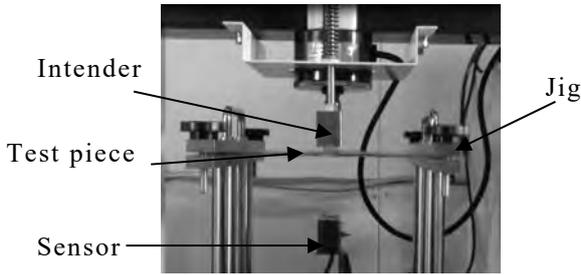


Fig.1 Bending test

また、段ボールは中芯の方向で異なる特性をもつことから、抄紙方向と垂直方向に対して各方向に 10 回、総測定数 20 回の試験を実施した。尚、各試験につき新しい試験片を用いて、圧子の初期位置や試験片の固定具合など、測定の準備段階でばらつきの影響が極力小さくなるようにした。

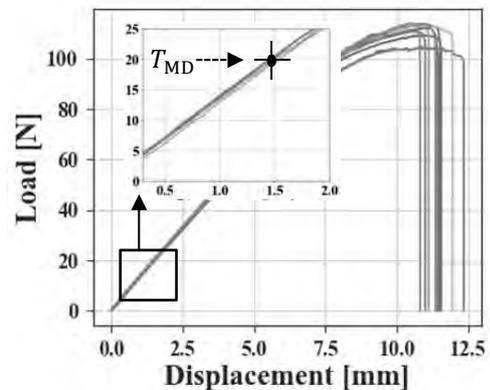
3.2 試験結果

曲げ試験で測定された荷重－変位特性を Fig.2 に示す。図中の各線は、それぞれの測定値を示している。Fig.2 に示した拡大図より、測定値には、試験機の性能(センサの分解能、サンプリングレートなど)といった試験機に依存するばらつきがあり、また、荷重負荷の小さい段階から測定値のばらつきが見受けられることから、試験準備や試験片の作成といった人的な要因で生じるばらつきも考えられる。

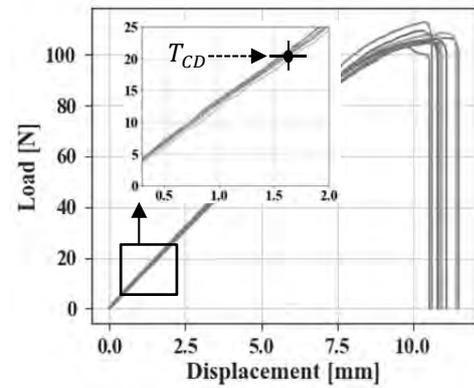
また、これらの測定された変位は、曲げ剛性によって決定されるため、弾性係数を調整して均質化解析の変位を測定値に合わせる。この調整済み弾性係数を算出するにあたり指標となる変位を以下のように定める。抄紙方向および垂直方向の 10 回の測定値からそれ

ぞれの平均として 2 方向の回帰直線を求め、この線上に存在する 20N の荷重を基準荷重 N_{20} とし、Fig.2 中に示した黒点、すなわち基準荷重 N_{20} おける変位を指標変位 T_{MD} 、 T_{CD} とする。

本研究では、Fig.2 に拡大図で示した線形範囲の一部である 5N から 20N を調整済み弾性係数の妥当性を評価するための対象とした。



(a) Machine direction



(b) Cross direction

Fig.2 Load -displacement characters

4. 数値解析

ここでは、均質化理論に基づく両面段ボールのモデル化および境界条件について述べる。

4.1 均質化法の理論^{5), 14)}

均質化解析では周期性を伴うマイクロ構造からなる構造体において、マイクロ構造の1周期にあたる構成単位をユニットセル、構造全体をマクロ構造と定義する。ユニットセルにおける変位 \mathbf{u} は、マイクロひずみ \mathbf{E} と擾乱変位 \mathbf{u}^* によって下記のように表される。

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{u}^* はユニットセルと同じ周期性を有する擾乱変位である。また、ユニットセル境界上の相対する2点を x^+ 、 x^- とすると弾性係数を評価するために、擾乱変位 $\mathbf{u}^*(x^+)$ 、 $\mathbf{u}^*(x^-)$ は次式を満足しなければならない。

$$\mathbf{u}^*(x^+) = \mathbf{u}^*(x^-) \quad (2)$$

式(2)を解くことで、マイクロ構造の均質化弾性係数を得ることができる。また、式(1)、(2)より、周期境界条件は次式のように表される。

$$\mathbf{u}(x^+) - \mathbf{u}(x^-) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \quad (3)$$

式(3)の周期境界条件を用いることで、マイクロ構造を考慮しながらマクロ構造を解くことができる。

4.2 有限要素モデル

両面段ボールの均質化モデルを下記のように作成した。

4.2.1 ミクロモデル(ユニットセル)

段ボールの1つの段をユニットセルとするマイクロモデルをFig. 3に示すように作成した。このマイクロモデルから式(2)による均質化弾性係数を得ることができる。Fig. 3よりx軸方向は抄紙方向、z軸方向は垂直方向を示している。中芯は製造過程により依存し各段で異なった形状をしているため、Harrysson and Ristinmaa¹⁵⁾に倣い正弦波としてモデル化を行った。また、ライナと中芯は異なる特性をもつため、それぞれ独立した弾性係数をMaterial(1)およびMaterial(2)として定義する。

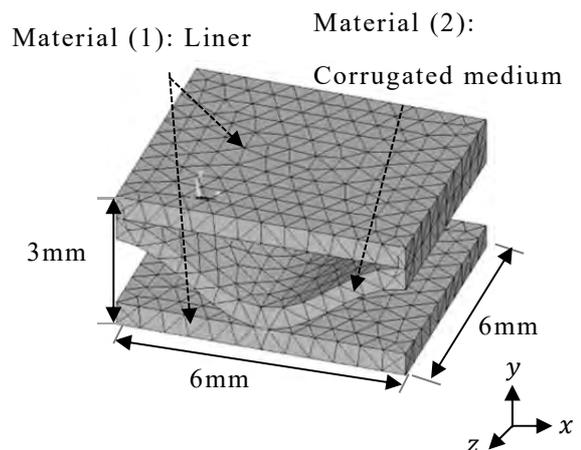


Fig.3 Composition and dimensions of micro model(Unit cell)

ユニットセルの弾性係数に関して、複両面段ボールでは算出式¹⁶⁾などから求めた値を用いることで、測定値と概ね一致した結果を得られている¹⁷⁾。しかし、両面段ボールに算出式から求めた弾性係数を用いると解析結果と測定値とで合わないことから、算出式か

ら求まる弾性係数はここでは用いず、第3章で示した指標変位 T_{MD} 、 T_{CD} に弾性係数を合わせるための均質化解析を行なって調整済み弾性係数を求める方法をとる。

本研究では、後述するライナおよび中芯の弾性係数を設計変数として繰り返し解析を行なうことで、逆問題を解くようにして得られる修正済み弾性係数を用いる。

4.2.2 マクロモデル

ここでは、式(1)、(2)の周期境界条件を適用した式(3)のマクロ構造の周期境界条件を解くことで変位を得る。

Fig.4 に試験片全体、すなわちマクロ構造をソリッド要素で簡易的にモデル化したマクロモデルを示すが、曲げ試験に用いた試験片と同様の寸法となるようモデル化し、抄紙方向と垂直方向の境界条件を定義する。また、段ボールの抄紙方向および垂直方向に関しては、マクロモデルに **Fig.3** に示したマイクロモデルの座標系をそのまま適用した。**Fig.4** より、抄紙方向に対して解析を行う場合の境界条件は、 C_1 および C_2 面上の xyz 方向を完全拘束し、 L_1 線上の鉛直方向に荷重を与える。一方、垂直方向に対して解析を行う場合の境界条件は、 C_3 および C_4 面上の xyz 方向を完全拘束し、 L_2 線上の鉛直方向に荷重を加える。また、マクロモデルでは、**Fig.3** のマイクロモデルから式(2)によって得られる均質化弾性係数を用いて、上述した2方向の境界条件から得られた解析結果の変位と3章で示した指標変位 T_{MD} 、 T_{CD} が同値なることを目的としている。そのため、こ

こで与える荷重値は基準荷重 N_{20} に固定して解析を行なう。

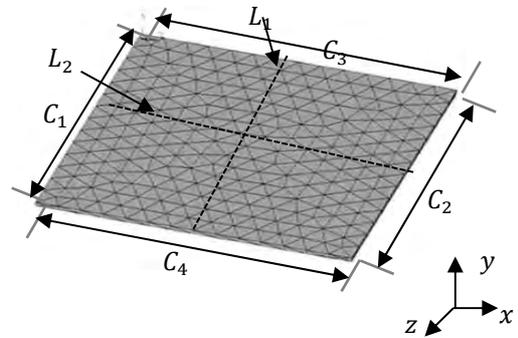


Fig.4 Boundary conditions of macro model.

5. 調整済み弾性係数の算出

本研究では、両面段ボールに均質化解析を適用するため、測定された変位と解析結果の変位が同値となるよう調整済み弾性係数を求めることにした。そのため、抄紙方向および垂直方向の境界条件を用いた解析結果の変位がそれぞれ指標変位 T_{MD} 、 T_{CD} と合うようにライナと中芯の弾性係数を設計空間として探索する必要がある。一方で、抄紙方向と垂直方向は異方性を有するため、同一の段ボールシートから作成された試験片であれば、2方向の解析結果の変位は設計空間上の点で交わる。そこで、抄紙方向および垂直方向に対して探索を行い、ここで得られた解析結果の変位をサンプル点として、抄紙方向と垂直方向の変位 - 弾性係数応答で構成される応答曲面を作成し、この2方向の応答曲面の交点座標を調整済み弾性係数として算出した。**Fig.5** には、応答曲面による交点の断面を示している。また、段ボールの剛性に糊の影響は無視できない要因であるが、ここではライナと中

芯しかモデル化していないものの測定された変位が合うように弾性係数を調整しているの
で、得られた弾性係数には糊の影響も含まれ
ていると考えられる。一方で、ここで得られ
た調整済み弾性係数は決定値であり、測定値
のばらつきを考慮していない。そこで、次節
から調整済み弾性係数のばらつきに対する評
価を行う。

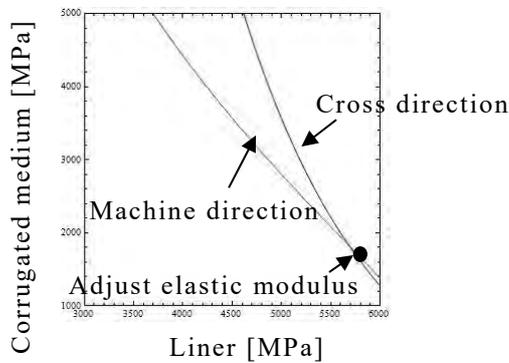


Fig.5 Adjusted elastic modulus.

6. ベイズ推定によるばらつきの評価

調整済み弾性係数は曲げ試験による測定値
のばらつきを含んでいる。ここでは、ベイズ
推定を用いて、これらのばらつきを評価する
方法を述べる。

6.1 観測データ

本研究で定めた基準荷重 N_{20} は回帰直線上
の値であることから各測定値の平均となる。
そのため、各測定値の基準荷重 N_{20} に対する
変位をベイズ推定に用いるための観測データ
 \mathbf{x} とし、ベイズ推定では少数の観測データか
らでも比較的良い推定結果を得られることか

ら、抄紙方向に 10 データ、垂直方向に 10
データを生成した。

6.2 階層ベイズモデル

ベイズの定理は次式に示すことができる。

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}) \quad (4)$$

ここで、 $\boldsymbol{\theta}$ は調整済み弾性係数、 \mathbf{x} は観測デ
ータ、 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ は事後確率密度関数(以下、事
後分布)、 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ は尤度、 $\pi(\boldsymbol{\theta})$ は事前分布で
ある。ベイズの定理では、尤度と事前分布を
乗ずることで事後分布を求める。事前分布は、
推定以前に解析者の把握している調整済み弾
性係数に関する類似データや過去のデータと
いった情報にもとづき定義することが可能で
ある。

本研究では、情報量基準 WAIC を用いて
事前分布を推定するためのハイパーパラメー
タを最適化する。情報量基準 WAIC を活用
するには、式(4)を次式に示す階層ベイズモ
デルへ拡張しなければならない。

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, \lambda) \propto p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}|\lambda)h(\lambda) \quad (5)$$

ここで、 $h(\lambda)$ はハイパーパラメータである。
このハイパーパラメータの利用によりばらつ
きに関する各々の因子をモデル化することが
可能であるが、全ての因子を考慮するのは事
実上不可能である。ここでは、試験機による
測定精度の指標をパラメータとする。

6.3 調整済み弾性係数評価モデル

調整済み弾性係数は、抄紙方向および垂直方向の応答曲面から求めた値であり、確率的にはばらつきをもつ。従って、抄紙方向と垂直方向の変位 - 弾性係数応答に次式の変量正規分布 $N(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ を仮定し、抄紙方向および垂直方向の変量正規分布を乗じたものを尤度関数 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ とする。

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = N(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta})\right] \quad (6)$$

ここで、 T は転置、 $\boldsymbol{\theta}$ は均質化解析による変位 - 弾性係数応答の各サンプル点の集合からなるベクトル、 $|\boldsymbol{\Sigma}|$ は共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の行列式であり、変位 - 弾性係数応答のサンプル点から求められる。また、調整済み弾性係数に関する事前分布 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\lambda)$ に対しても次式の変量正規分布を仮定する。

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\lambda) = N(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}|^{\frac{1}{2}}} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)\right] \quad (7)$$

ここで、事前分布の平均 $\boldsymbol{\theta}_0$ は調整済み弾性係数の値、 σ^2 は事前分布の共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}$ を規定するハイパーパラメータであり、式(5)の階層ベイズモデルにおける右辺の $h(\lambda)$ に対応する。このハイパーパラメータは調整済み弾性係数のばらつきを推定するための精度向上となる。調整済み弾性係数は測定値のばらつ

きを含むため、このハイパーパラメータに対して試験機の測定精度を表す指標として、式(8)の形状パラメータ α と尺度パラメータ β をパラメータにもつガンマ分布 $Ga(\alpha, \beta)$ で仮定する。測定精度の指標は負の値を含まないことから、確率密度分布が正の値のみをもつガンマ分布を採用した。また、このパラメータは、零に近いほど測定精度が高いことを表す。

$$h(\lambda) \sim Ga(\alpha, \beta) \quad (8)$$

以上より、式(6)、(7)、(8)を式(5)の右辺に代入して計算した事後分布 $\pi(\boldsymbol{\theta}, \lambda|\mathbf{x})$ から調整済み弾性係数のばらつきに対する評価を行う。尚、事後分布を推定するための計算には、後述するマルコフ連鎖モンテカルロ法¹⁸⁾を用いる。

6.4 ハイパーパラメータの最適化

情報量基準 WAIC を用いてハイパーパラメータを最適化する方法を提案する。

6.4.1 情報量基準 WAIC^{11), 12)}による評価

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ を独立な観測データ、 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ を尤度関数、 $p(\boldsymbol{\theta}|\lambda)$ を調整済み弾性係数に対する事前分布としたとき、 Z を正規化定数とすると、WAIC は次式により求められる。

$$T = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log p \frac{1}{Z} \int \left(p(x_i|\boldsymbol{\theta}) + \int_{j=1}^n p(x_i|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\hat{\lambda}) d\boldsymbol{\theta} \right) \quad (9)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{Z} \int (\log p(x_i|\theta))^2 \prod_{j=1}^n p(x_j|\theta) p(\theta|\hat{\lambda}) d\theta - \frac{1}{Z} \int \log p(x_i|\theta) \prod_{j=1}^n p(x_j|\theta) p(\theta|\hat{\lambda}) d\theta \right)^2 \quad (10)$$

$$WAIC = T + \frac{V}{n} \quad (11)$$

ここで、 $\hat{\lambda}$ はハイパーパラメータの最尤推定値である。ハイパーパラメータの最適化を行うには周辺尤度を最大化することで、WAICを最小化する必要がある。従って、周辺尤度を最大化するパラメータを点推定量として求める。

6.4.2 ハイパーパラメータの最適化

ガンマ分布の周辺尤度を最大化するパラメータの推定を行なう。ハイパーパラメータ $h(\lambda)$ を規定するガンマ分布の確率分布は下記のように定義される。

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad (12)$$

観測データ \mathbf{x} が与えられたとき、式(12)の対数尤度関数は次式のように表される。

$$\log p(\mathbf{x}|\alpha, \beta) = (\alpha - 1) \sum_i \log x_i - n \log \Gamma(\alpha) - n\alpha \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_i x_i \quad (13)$$

式(13)より β に関する最尤方程式を解くことにより最尤推定値 $\hat{\beta}$ を得ることができる。

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\alpha} \quad (14)$$

ここで、 \bar{x} は観測データの平均である。式(13)に式(14)を代入することで、対数尤度関数を次式に書き直すことができる。

$$\log p(x|\alpha, \hat{\beta}) = n(\alpha - 1) \overline{\log x} - n \log \Gamma(\alpha) - n\alpha \log \bar{x} + n\alpha \log \alpha - n\alpha \quad (15)$$

ここで、 $\overline{\log x}$ は対数尤度の平均である。式(15)より、 α についての尤度方程式を解くことで最尤推定値 $\hat{\alpha}$ を得ることができる。従って、式(15)を最大化する α を数値的に求める。ここでは、最尤推定値 $\hat{\alpha}$ を求めるため局所近似最大化法¹⁹⁾を用いる。そのため、式(15)を下記に示す局所近似式で表す。

$$\log p(x|\alpha, \hat{\beta}) \approx c_0 + c_1\alpha + c_2 \log(\alpha) \quad (16)$$

ただし、 c_0 は定数、 c_1 および c_2 は次式となる。

$$c_1 = p'(\alpha_0) - \frac{c_2}{\alpha_0} \quad (17)$$

$$c_2 = -\alpha_0^2 p''(\alpha_0) \quad (18)$$

また、式(16)を $g(\alpha)$ と表し、微分することで下記の式を得る。

$$g'(\alpha) = c_1 + \frac{c_2}{\alpha} \quad (19)$$

$$g''(\alpha) = -\frac{c_2}{\alpha^2} \quad (20)$$

ここで、式(15)の対数尤度関数は上に極限を持つため $p''(\alpha) \leq 0$ の関係が成り立つ。従って、 $c_2 > 0$ となり $g(\alpha)$ も同様に上に極限を持つ。すなわち、 $g(\alpha)$ を最適化するには $g'(\alpha) = 0$ を満たす α を次式により求める。

$$\alpha = -\frac{c_2}{c_1} \quad (21)$$

式(21)に式(17)、(18)を代入して整理すると次式を得る。

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{p'(\alpha_0)}{\alpha_0^2 p''(\alpha_0)} \quad (22)$$

ここで、 $p'(a)$ および $p''(\alpha)$ について、式(15)の対数尤度関数における $\alpha \log \alpha$ に着目すると下に極限を持つため、 α_0 における接線は次式の関係を得る。

$$f(a) \geq (\log \alpha_0 + 1)(a - \alpha_0) + \alpha_0 \quad (23)$$

式(15)に式(23)を代入すると対数尤度関数の下限は次式の関係で表される。

$$\log p(x|\alpha, \beta) \geq n(\alpha - 1) \overline{\log x} - n \log \Gamma(\alpha) - n\alpha \log \bar{x} + n\alpha_0 \log \alpha_0 + n(\alpha - \alpha_0) \log \alpha_0 - n\alpha_0 \quad (24)$$

式(23)の下限が $da/dx = 0$ となる導関数 $p'(a)$ および $p''(\alpha)$ は次式となる。

$$p'(\alpha) = \overline{\log x} - \Psi(\alpha) - \log \bar{x} + \log \alpha_0 \quad (25)$$

$$p''(\alpha) = -n\Psi'(\alpha) + \frac{n}{\alpha} \quad (26)$$

ここで、 $\Psi(\alpha)$ はディガンマ関数である。式(22)に式(25)、(26)を代入して整理すると最尤推定値 $\hat{\alpha}$ を得るための更新式を得る。

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{\overline{\log x} - \Psi(\alpha_0) - \log \bar{x} + \log \alpha_0}{\alpha_0^2 \left(\frac{1}{\alpha_0} - \Psi'(\alpha_0) \right)} \quad (27)$$

本研究では、一様となるガンマ分布から更新された α の推定値を α_0 として、観測データ x を用いて更新することで最尤推定値 $\hat{\alpha}$ の値を求めた。

6.5 事後分布推定

ベイズ推定によって得られた事後分布から調整済み弾性係数のばらつきを考察する。

6.5.1 推定条件

事後分布の計算には多変量であることや積分分布可能な確率分布を考慮することで、尤度関数の計算負荷が極めて高くなる。そこで、マルコフ連鎖モンテカルロ法(Markov Chain Monte Carlo Methods、MCMC)¹⁸⁾を用いて、事後分布を推定する。MCMC では、初期値の影響があるサンプル冒頭部の破棄区間 burn-in を 20000 step とし、その後の 50000 step を事後分布とした。また、収束の判定指標として \hat{R}^{20} を用いた。 \hat{R} は同時に複数の MCMC によって推定された定常状態後の各サンプルデータを用いて得られる値である。この複数の MCMC による推定のことを Chains と呼び、4Chains から以下の式より \hat{R} を求めた。

$$\hat{R} = \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k} \frac{B}{W} \quad (28)$$

ここで、 W は Chains 内の分散、 B は Chains 間の分散、 k は burn-in 後のサンプル数である。 \hat{R} の値が 1 に近いほど収束していることを示しており、値が 1.1 以下であれば定常分布に収束しているといえる。本研究では \hat{R} の値が 1.1 以下になるように解析条件を設定している。

6.5.2 ばらつきの推定結果

ベイズ推定の計算に MCMC を用いて得られた調整済み弾性係数の事後分布を Fig.6 に示す。図中の白点は、5 章で得られた調整済み弾性係数、分布の色は確率密度関数 (Probability density function、PDF)を表している。

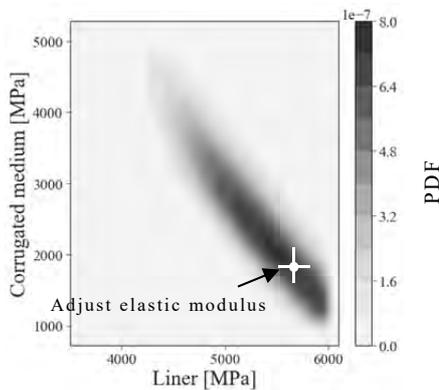


Fig.6 Posterior distribution

Fig.6 より、事後分布の全体形状は、広範囲に分布することなく、調整済み弾性係数が含むばらつきを表しているといえる。加えて、調整済み弾性係数に対する確信度の高い区間

も的確に捉えられている。このような事後分布が推定できたのは、ハイパーパラメータの最適化により確信度の高い事前分布のパラメータを得られたためであると考えられる。

また、Fig.7 に調整済み弾性係数におけるライナと中芯の各事後分布を示す。点線内の区間は 95 パーセント確信区間を表わしている。95 パーセント確信区間は、この区間内に含まれる調整済み弾性係数の信頼性を示しており、区間内の値を用いることで解析結果の妥当性を保証できる。Fig.7 より、ライナおよび中芯の調整済み弾性係数の事後分布は上に凸の形状をしており、ピークが存在する。また、各事後分布の 95 パーセント確信区間に含まれる面積も大きく、的確に両軸を捉えている。従って、各事後分布においても確信度の高い推定結果を得られたといえる。

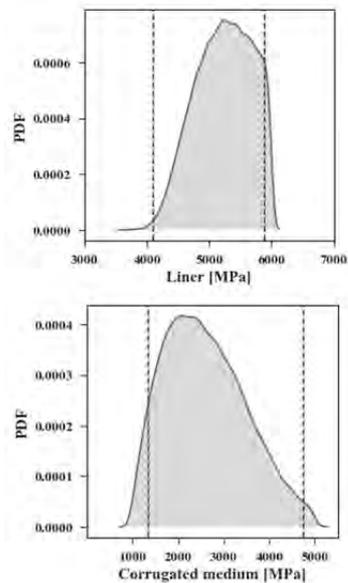


Fig.7 95% credible interval for liner and corrugated medium.

このようにベイズ推定を用いることで、信頼性のあるパラメータを、95 パーセント確信区間をもって評価できることは、従来にない妥当性評価法である。これらのことから、本研究で提案した情報量基準 WAIC を用いてハイパーパラメータを最適化することで、調整済み弾性係数が含むばらつきを精度よく推定できたと言え、情報量基準 WAIC を用いたハイパーパラメータの最適化法の有用性を示すことができた。

6.5.3 妥当性検証

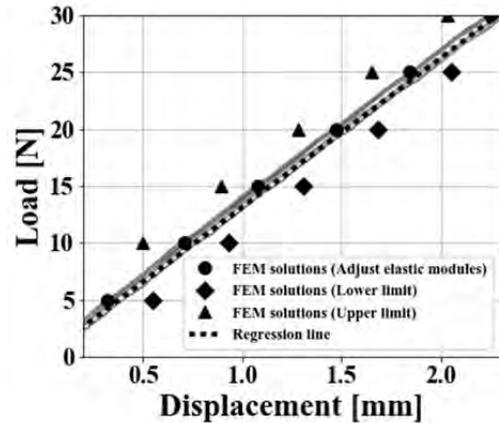
調整済み弾性係数の有効性を検証するため、推定された事後分布の平均値と 95 パーセント確信区間を用いた均質化解析の結果と測定値および測定値の回帰直線と比較を行った。調整済み弾性係数の上限値 U および下限値 L はそれぞれ次式により求めた。

$$U = \bar{\mu} + 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (29)$$

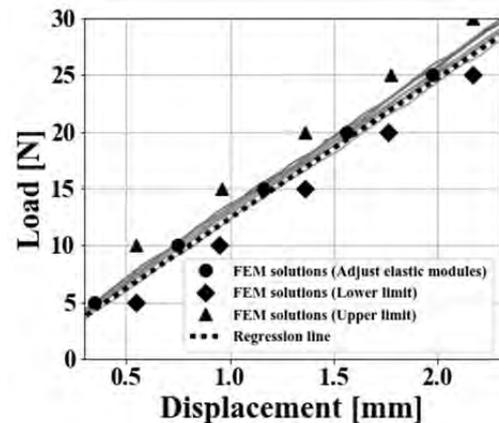
$$L = \bar{\mu} - 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (30)$$

ここで、 $\bar{\mu}$ は事後分布の平均、 s は事後分布の標準偏差、 n は観測データ数である。また、この上限値と下限値を用いた数値解析は、信頼性が保証できる解析結果の範囲を意味する。**Fig.8** に抄紙方向および垂直方向の比較結果を示す。図中の凡例以外の各線は **Fig.2** の拡大図で示した各測定値 (Measuring values)、点線は測定値から求めた回帰直線を表している。**Fig.8** より調整済み弾性係数を用いた解

析結果は、回帰直線と概ね一致していることから、調整済み弾性係数が正しく機能しており、均質化解析に適用可能な調整済み弾性係数の有効性を確認することができた。一方、95 パーセント確信区間では、上限値および下限値を用いて数値解析を行なった結果が、調整済み弾性係数を用いた解析結果を内包している。従って、95 パーセント確信区間の調整済み弾性係数も正しく機能しており、上限値と下限値を用いて解析結果が保証できる範囲を明示的に示すことができた。



(a) Machine direction



(b) Cross direction

Fig.8 Validation of estimated elastic modulus. Each line shows measurement values in each experiment.

7. 結言

本論文では、均質化法の数学的な理論の拡張を行わずに、両面段ボールに対して均質化解析の適用が可能となる調整済み弾性係数の提案および調整済み弾性係数が含むばらつきの評価法を提案した。調整済み弾性係数においては、試験と均質化解析から導けることを示した。また、ベイズ推定を用いた調整済み弾性係数におけるばらつきの評価については、ハイパーパラメータに対して情報量基準 WAIC を用いて最適化を行ったパラメータから推定された事後分布より、調整済み弾性係数のばらつきが精度よく評価できることを示した。得られた知見を以下にまとめる。

- (1) 基準荷重における指標変位に弾性係数が合うように均質解析を行うことで、両面段ボールに均質化解析が適用可能な調整済み弾性係数を算出することができた。
- (2) 調整済み弾性係数は指標変位に合わせることで、ライナと中芯を接着する糊などの影響を考慮した値として算出される。
- (3) 情報量基準 WAIC を用いてハイパーパラメータを最適化することで、確信度の高い事前分布を得ることができた。その結果、推定された事後分布が調整済み弾性係数のばらつきを捉えていることから、最適化パラメータによって調整済み弾性係数のばらつきを精度よく推定できることを明らかにした。
- (4) 調整済み弾性係数を用いた均質化解析と測定値および測定値の回帰直線において、概ね一致する結果を示した。また、95 パーセント確信区間の上限値および

下限値を均質化解析に用いた結果に調整済み弾性係数を用いた解析結果が内包されていることから、95 パーセント確信区間が正しく機能していることが確認でき、解析結果の信頼性が保証できる範囲を明示的に示した。

本研究で示した一連の手法により、両面段ボールに対する均質化解析が可能となり、且つその妥当性を保障することで、解析に基づく包装設計の信頼性向上に役立てることができる。本論では線形範囲に限定して議論を進めているが、非線形解析に拡張することで、今まで、試行錯誤に依存していた緩衝材等の設計においても均質化解析を活用した信頼性評価を伴う設計に寄与できるものと考えられる。

<参考文献>

- 1) 松島理、松島成夫、面圧縮を受ける段ボール中芯の形状と弾性強度(楕円対象曲線部よりなる中芯波形の場合)、Vol.5, No.2, pp.107-118 (1996)
- 2) 中川幸臣、丹羽一邦、包装設計の FEM 解析における段ボールのモデル化の検討、日本包装学会誌、Vol.14, No.5, pp.317-327 (2005)
- 3) 中川幸臣、丹羽一邦、斎藤勝彦、段ボール構造体の落下衝撃シミュレーション、日本包装学会誌、Vol.15, No.6, pp.333-343 (2006)
- 4) 三上英一、茨木孝昌、小林孝男、小高功、有限要素法による段ボールシートの垂直圧縮強さの解析、日本包装学会誌、Vol.13, No.4, pp.243-252 (2004)

- 5) 寺田賢二郎、菊池昇、均質化法入門、丸善出版(2003)
- 6) 高野直樹、座古勝、菊池昇、均質化法による単層波状コアサンドイッチ板の解析、日本材料学会、Vol.44, No.502, pp.905-910(1995)
- 7) R. V. Kohn and M. Vogelius, A new model for thin plates with rapidly varying thickness, International Journal of Solids and Structure, Vol.20, No.4, pp.333-350(1984)
- 8) 寺田賢二郎、平山紀夫、山本晃司、松原成志朗、複合板のマルチスケール解析のための数値平板試験、日本計算工学会、No.20150001(2015)
- 9) ベイズ統計学概説、松原望、培風館、(2010)
- 10) M. B. Christopher, Pattern recognition and machine learning, Springer, pp.359-378(2006)
- 11) S. Watanabe, Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory, Journal of Machine Learning Research, Vol.14, pp.3571-3591(2010)
- 12) H. Akaike, Maximum likelihood Identification, of Gaussian autoregressive moving average model, Biometrika, Vol.60, No.2, pp.255-265(1973)
- 13) M. Shimamura, Y. Ezawa, Y. Tamura, S. Takashimizu and D. Satou, High accurate analysis by experimental and simulation using Bayesian inference for corrugated cardboard, Mechanical Engineering Journal, Vol.3, No.4(2016)
- 14) 高野直樹、均質化法による新しい数値シミュレーション、日本複合材料学会誌、Vol.7, No.1, pp.4-11(2001)
- 15) H. Anders and R. Matti, Large strain elasto-plastic model of paper and corrugate board, International Journal of Solids and Structures, Vol.45, pp.3334-3352(2008)
- 16) Z. W. Wang, Y. P. E: Energy absorption properties of multi-layered corrugated paperboard in various ambient humidities, Materials and Design, Vol.32, pp.3476-3485(2011)
- 17) 奥村大、大野信忠、小野田孝行、曾我將孝、弾性積層段ボールの圧縮強度に微視構造の及ぼす影響の均質化解析、計算数理工学論文集、Vol.12、No. 18-121212(2012)
- 18) 久保裕也、データ解析のための統計モデリング入門、岩波書店、pp.170-191(2012)
- 19) T. P. Minka, Estimate a Gamma Distribution, Microsoft Research Technical Report (2002)
- 20) A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari and D. B. Rubin, Bayesian data analysis, Journal of the American Statistical Association, Vol.109, No.507, p.297(2014)

(原稿受付 2019年4月10日)

(審査受理 2019年8月21日)