

# 尖度を考慮した非ガウス型 ランダム振動生成法

細山 亮\*、中嶋 隆勝\*

## The Method of Generating Non-gaussian Random Vibration Using Kurtosis

Akira HOSOYAMA\* and Takamasa NAKAJIMA \*

現状の振動試験は、与えられたパワースペクトル密度に従って振動が生成され、その振動の確率密度分布は常にガウス分布（ガウス型ランダム振動）となる。しかしながら、実際の輸送振動は非ガウス分布（非ガウス型ランダム振動）となる場合が多いため、振動試験と実際の輸送では確率密度分布が異なり、振動試験の試験精度が十分に高いとは言い難い。そこで、本研究では、振動試験の試験精度向上を目的として、尖度を考慮した地震動再現手法に基づく非ガウス型ランダム振動生成法を提案した。さらに、非ガウス型ランダム振動を生成する際のパラメータである群遅延時間の標準偏差と尖度との関係についても明らかにし、実輸送時の振動加速度から得られる尖度を持つ非ガウス型ランダム振動が生成できることを示した。非ガウス型ランダム振動試験を実施することにより、試験精度の向上、輸送トラブルの減少、および過剰包装の適正化が期待できる。

On the current vibration testing, vibration was generated by the power spectral density based on the actual transportation vibration. The probability density function of the acceleration generated by the vibration testing machine is different from that of the actual transportation vibration. The former probability density function is always gaussian, and the latter is usually non-gaussian. So, the accuracy of the current vibration testing is not high enough. In this research, we proposed the method of generating non-gaussian random vibration using kurtosis in order to improve vibration testing accuracy. Furthermore, we made clear the relationship between kurtosis and the standard deviation of group delay time which is the parameter when we generate non-gaussian random vibration. And we showed that it is possible to generate the non-gaussian random vibration with the kurtosis calculated from the actual transportation vibration. It is expected to improve the vibration testing accuracy, decrease the transport troubles, and optimize the transport packaging by non-gaussian random vibration testing.

キーワード: 包装、輸送、振動試験、加速度、非ガウス分布、尖度

Keywords : Packaging, Transportation, Vibration Test, Acceleration, Non-Gaussian Distribution, Kurtosis

\* 大阪府立産業技術総合研究所 〒594-1157 大阪府和泉市あゆみ野 2-7-1 TEL:0725-51-2703  
Technology Research Institute of Osaka Prefecture, 2-7-1, Ayumino, Izumi, Osaka 594-1157, Japan

## 1. 緒言

製品を安全に輸送するために製品には包装が施され、包装貨物の安全性を事前に確認するために振動試験が実施される。しかし、振動試験を行ったにもかかわらず、実際に輸送を行うと製品が損傷している場合があり、現状の振動試験が現場で起こる損傷を十分に再現しているとは言い難い。その理由として、振動試験と実輸送とでは振動加速度の確率密度分布が異なること、すなわち、振動試験では確率密度分布は常にガウス分布となるが、実輸送時には非ガウス分布となる場合がある<sup>1)</sup>ことが挙げられる。

このような課題に対して、Rouillard<sup>2)</sup>やSmallwood<sup>3)</sup>、Steinwolf<sup>4)</sup>は、非ガウス型ランダム振動を生成する方法を提案している。これにより、非ガウス型ランダム振動が生成できるようになったが、(i)発生させた振動の確率密度分布が実輸送の確率密度分布と一致しない場合がある、(ii)振動を生成するときにパワースペクトル密度（以下、PSDと略す）が変化してしまう、(iii)技術的に振動制御システムに組み込むことが困難であるといった問題点があり、決定的な方法は確立されていないのが現状である。

そこで、本研究では、確率密度分布の非ガウス性を表す統計量である尖度を導入し、(i)発生させた振動の尖度を実輸送と一致させることができ、(ii)振動を生成したときにPSDが変化せず、(iii)振動制御システムに実装容易な新しい非ガウス型ランダム振動生成法を提

案する。

## 2. 尖度を考慮した非ガウス型ランダム振動生成法

加速度波形をそのまま再現させることなく、ランダム振動を再現するためには、PSDと位相を与える必要がある。現状の振動試験では、PSDに関しては実輸送を考慮して決められるが、位相に関しては特に実輸送を考慮することなく、乱数を用いて値が与えられているだけである。そのため、現状の振動試験では、ガウス分布以外の確率密度分布を持つ加速度を発生させることができない。一方、実際の輸送中に発生する加速度に目を向けると、確率密度分布が非ガウス分布となる場合がある<sup>1)</sup>。

そこで、振動試験機が実輸送時の振動特性をより忠実に再現できるように、非ガウス型ランダム振動生成法を提案する。具体的には、非ガウス型ランダム振動を生成するための新しい位相設定法を構築する。

### 2.1 非ガウス分布の定量化

非ガウス分布を定量化するために、尖度(Kurtosis)と呼ばれる統計量を用いる。尖度 $K$ は以下の式で表わされる<sup>4)</sup>。

$$K = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x_i - m)^4)}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x_i - m)^2)\right)^2} \quad (1)$$

ここで、 $x_i$ は加速度、 $m$ は加速度の平均、

$N$  はデータ数を表す。上式より加速度がガウス分布の場合は尖度は 3 となるが、非ガウス分布の場合は尖度は 3 以外の値となる。特に、尖度が 3 より大きくなれば、ガウス分布の場合と比べて大きな加速度の発生割合が高くなる。

## 2.2 ガウス型ランダム振動生成法

ランダム振動の時刻歴波形  $x(t)$  は、フーリエ級数の和を用いて次式で表される<sup>4)</sup>。

$$x(t) = \sum_{k=1}^L A_k \cos(2\pi k \Delta f t + \phi_k) \quad (2)$$

$$A_k = \sqrt{2\Delta f S(k\Delta f)}$$

ここで、 $S(k\Delta f)$  は PSD、 $\phi_k$  は  $k$  次成分の位相、 $\Delta f$  は周波数分解能、 $L$  はデータ数を表す。

このとき、ランダム振動を発生させるためには、PSD と位相を与える必要がある。しかし、JIS や ASTM などの規格をみると、PSD については値が規定されているのに対し、位相についてはなんら規定がされていない。そのため、位相については  $0 \sim 2\pi$  までの値が一様乱数で与えられ、振動加速度の確率密度分布は常にガウス分布となっている。しかしながら、実際の輸送ではガウス分布とならないことが多いため、振動試験と実輸送では振動加速度の確率密度分布はかけ離れたものになっている。

## 2.3 非ガウス型ランダム振動生成法

これまで、耐震工学の分野において、地震動を再現する方法として位相に着目した研究

が展開されてきた<sup>5)</sup>。その中で、位相を周波数で微分した位相の傾きが波形の包絡線に影響を及ぼすことが示されている。ここで、位相の傾きを  $t_{gr}(\omega)$ 、角振動数を  $\omega$ 、位相を  $\phi$  とおくと、位相の傾きは以下の式で表される。

$$t_{gr}(\omega) = \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (3)$$

この位相の傾きは群遅延時間とも呼ばれ、この値の分布が平均  $m$ 、標準偏差  $\sigma$  の正規分布に従うとすると、平均  $m$  が時刻歴波形の重心位置を、標準偏差  $\sigma$  が波形の広がりを表す<sup>6)</sup>。すなわち、平均  $m$  が波形の最大値を表す時刻位置を示し、標準偏差  $\sigma$  が大きくなるほど、振動波形が時間軸方向に広がり、標準偏差  $\sigma$  が小さくなるほど、振動波形が加速度方向に広がるようになる。また、平均  $m$  の変化は、波形の最大値を時間軸方向に平行移動させるだけであるので、波形の包絡形状には影響を与えない。そのため、尖度を任意の値に設定した非ガウス型ランダム振動を生成するためには、群遅延時間  $t_{gr}(\omega)$  の標準偏差  $\sigma$  をパラメータとして変化させればよい。

ここで、 $k$  次成分の位相  $\phi_k$  は式(3)より、次式で表すことができる。

$$\phi_k = \phi_{k-1} + t_{gr}(\omega_k) d\omega \quad (4)$$

ただし、初期位相  $\phi_0$  は  $0 \sim 2\pi$  の一様乱数から与えられる。式(4)から得られた位相をランダム振動の時刻歴波形を表す式(2)に代入することで、非ガウス型の時刻歴波形を得ることができる。

### 3. 結果と考察

#### 3.1 数値例

Fig.1 に示す PSD (JIS Z 0232:2004) を用いて、従来法によりガウス型、提案手法により非ガウス型のランダム振動波形を生成した。その結果を Fig.2、Fig.3 に示す。ガウス型、非ガウス型ともに、1 フレームあたりのデー

タ数を 1024 とし、これを 100 フレーム生成して繋ぎ合わせ、合計 102400 点の時刻歴データとした。非ガウス型ランダム振動の生成において、ガウス型と非ガウス型の差が明確に現れるような値として、標準偏差を 200 と設定した。また、群遅延時間の平均値については、1 フレームの波形の中央に波形の最大値が来

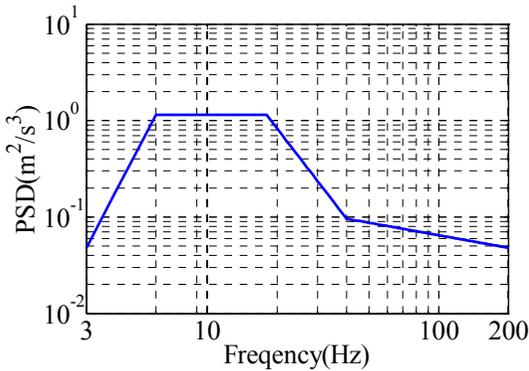


Fig.1 Acceleration PSD(JIS Z 0232:2004)

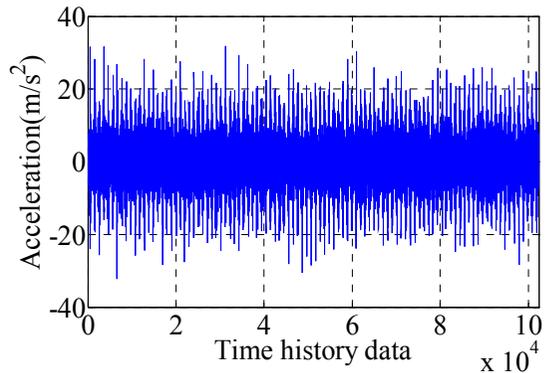


Fig.3 Non-gaussian random vibration  
(Kurtosis=4.46)

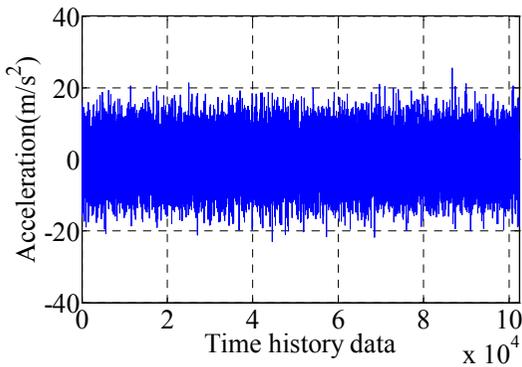


Fig.2 Gaussian random vibration  
(Kurtosis=2.97)

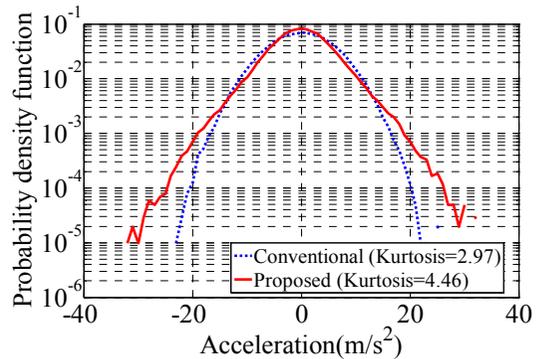


Fig.4 Relation of probability density function  
between proposed and conventional method

Table1 Kurtosis obtained by conventional method and proposed method

	Kurtosis	Probability Density Distribution	Parameter
Conventional Method	2.97	Gaussian	—
Proposed Method	4.46	Non-Gaussian	$m=512$ $\sigma=200$

るように 512 と設定した。Fig.4 に両者の確率密度分布を比較したグラフを示す。また、Table1 に従来法と提案手法により得られた加速度の尖度を示す。

提案手法と従来法との唯一の違いは、位相の設定方法であり、PSD についてはいかなる処理も施していないため、提案手法、従来法ともに得られる PSD は等しくなる。一方、Fig.4 の確率密度分布を見ると、従来法は常にガウス分布となるのに対し、提案手法では、従来法のガウス分布と比べて分布の裾野が広がっており、大きな加速度の発生割合が高くなっているのが見て取れる。

次に、従来法、および提案手法によって得られた波形について比較を行う。今回、ランダム振動を生成するために用いた PSD は、JIS Z 0232 に記載されているものであり、RMS 値は  $5.8\text{m/s}^2$  である。いま、振動加速度の確率密度分布がガウス分布に従うとすると、加速度が RMS 値の 3 倍である  $17.4\text{m/s}^2$  までに入る確率は 99.7% となる。Fig.2 の波形を見ると、 $20\text{m/s}^2$  以内にほとんどの振動が収まっており、また RMS 値の 4 倍を超えるような加速度は発生しておらず、ほぼガウス分布に従っていることがわかる。これに対し、Fig.3 の波形では、RMS 値の 4 倍を超える加速度が多く見られ、ガウス分布に比べて大きな加速度の割合が高い分布となっていることがわかる。

### 3.2 尖度と標準偏差の関係

位相に着目することにより波形を制御する手法は、耐震工学の分野において発展を遂げてきた。その中で振動波形を生成する際、加速度応答スペクトルや振動波形の包絡線に適合するように再現させることはあった<sup>5)</sup>が、

確率密度分布を目標にして波形を再現させることは行われていない。そこで、確率密度分布に着目し、非ガウス性を表す統計量である尖度を目標として振動波形を再現させるために、標準偏差と尖度の関係を明らかにする。そして、目標の尖度を持つ非ガウス型ランダム振動を生成できることを示す。

標準偏差と尖度の関係を調べるために、Fig.1 の PSD を用いて振動波形を生成した。このとき生成した時刻歴データは、前節と同様、1 フレームあたりのデータ数を 1024 とし、これを 100 フレーム生成したものを繋ぎ合わせた合計 102400 点とした。そして、この時刻歴データに対して、尖度を求めた。この操作を 10 回繰り返して得られた尖度のデータ 10 個に対して、平均値を求め、最終的な尖度の値とした。なお、標準偏差は、110 から 400 までの値に設定し、平均値は先程と同様、512 と設定した。Fig.5 に得られた尖度と標準偏差の関係を示す。

Fig.5 のグラフを見ると、標準偏差の値を大きくすれば、尖度は 3 に近づいていくこと、すなわち、ガウス型ランダム振動が得られることがわかる。一方、標準偏差の値を小さく

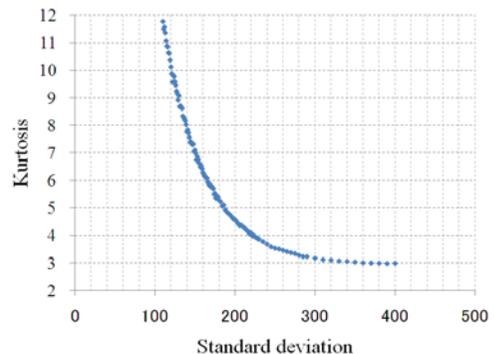


Fig.5 Relationship between kurtosis and standard deviation

していくと、尖度の値が大きくなっていくことがわかる。また、Fig.5のグラフから、所望の尖度を持つランダム振動を得るために設定すべき標準偏差の値を、読み取ることができる。ここで、前節において標準偏差を200に設定した場合に尖度が4.46のランダム振動が

得られているが、Fig.5のグラフを見ることで、標準偏差を200に設定した場合に、尖度の値が約4.5になることを予想することができる。

以上のように、尖度と標準偏差の関係を用いることで、任意の尖度を持つ非ガウス型ランダム振動を生成することが可能となる。

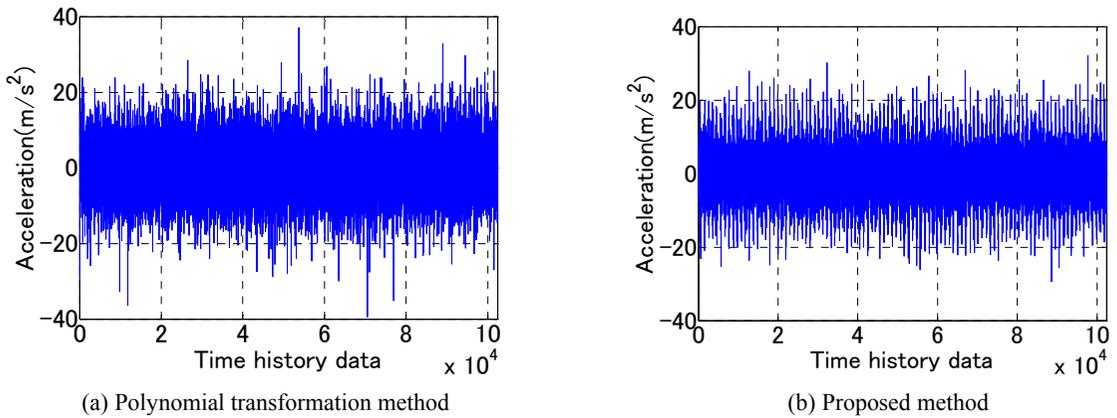


Fig.6 Comparison of Acceleration by polynomial transformation method and proposed method

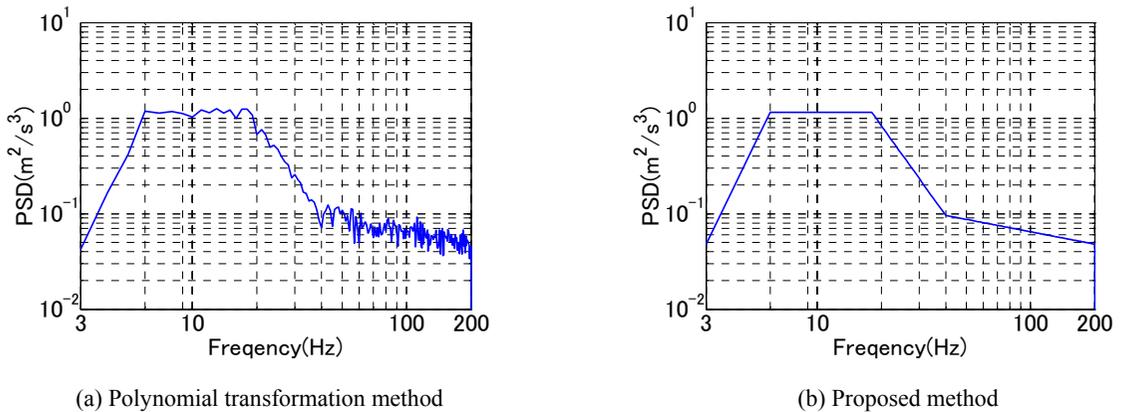


Fig.7 Comparison of PSD by polynomial transformation method and proposed method

Table2 Kurtosis and skewness obtained by polynomial transformation method and proposed method

	Kurtosis	Skewness
Polynomial Transformation Method	3.99	-0.05
Proposed Method	3.99	0.09

### 3.3 多項式変換による方法と提案手法の比較

前報<sup>1)</sup>では、ガウス型と非ガウス型ランダム振動における蓄積疲労の評価を行った。そこで非ガウス型ランダム振動を生成する際、Winterstein<sup>7)</sup>の多項式変換による方法を用いた。しかしながら、多項式変換による方法では非ガウス型ランダム振動を生成する際に PSD が変化してしまい、PSD を制御することが困難であるという問題点があった。そこで、本研究で提案している手法の有効性を示すために、提案手法と多項式変換による方法、それぞれにより非ガウス型ランダム振動を生成し、両者の PSD について比較を行う。

ここでは、尖度を 4、歪度を 0 に設定し、Fig.1 の PSD を用いて振動を生成した。先程と同様、1 フレームあたりのデータ数を 1024 とし、これを 100 フレーム生成して繋ぎ合わせ、合計 102400 点の時刻歴データとした。提案手法において、先程と同様に群遅延時間の平均値を 512 と設定し、標準偏差に関しては、Fig.5 より尖度が 4 になるときの値を読み、220 と設定した。また、PSD の算出においては、各フレーム毎に PSD を算出し、得られた 100 フレーム分の PSD について平均を求め、最終的な PSD とした。

Fig.6 に多項式変換による方法と提案手法による方法により得られた振動波形を、Fig.7 に PSD を示す。また、Table2 に多項式変換による方法と提案手法により得られた加速度の尖度と歪度を示す。

Fig.7 (a)の PSD を見ると、振動を生成する際に設定した Fig.1 の PSD と比べて歪みが生じていることがわかる。一方、Fig.7(b)では、Fig.1 と全く同じ PSD が得られており、PSD の歪みが生じていない。非ガウス型ランダム

振動を生成する際、PSD に歪みが生じると制御が困難になるという問題点があるが、本手法では、原理的に PSD に歪みが生じることはない。そのため、現在のランダム振動制御システムにも実装が容易な手法であると言える。

## 4. 結論

本研究では、地震動再現手法に基づいて、尖度を考慮した非ガウス型ランダム振動生成方法を提案した。

以下得られた結果を示す。

- (1) 群遅延時間に基づいて位相を設定することにより、非ガウス型ランダム振動が生成できることを示した。
- (2) 尖度と標準偏差の関係から、標準偏差が小さくなると尖度が高くなり、標準偏差が大きくなると尖度の値が 3 に収束していくことがわかった。
- (3) 本手法により生成した振動の尖度を実輸送時の振動加速度から得られる尖度と一致させることで、試験精度の大きな向上が見込まれる。

今後は、振動試験のさらなる再現精度向上のために、尖度だけでなく歪度も考慮した振動試験方法について研究を進めていく予定である。

## 5. 謝辞

本研究を遂行するにあたり、多大な御指導を賜りました神戸大学大学院・斎藤勝彦教授に甚大なる謝意を表します。また、本研究の一部は、JST 地域イノベーション創出総合支援事業、平成 20 年度シーズ発掘試験「振動破壊事故の防止に役立つ非ガウス型ランダム振

動試験機の開発」の援助のもとに実施しました。本援助に深く謝意を表します。

<参考文献>

- 1) 細山亮、中嶋隆勝、日本包装学会誌、19(2)、113-121(2010)
- 2) V.Rouillard and M.A.SEK, Packaging Technology and Science, 13, 149-156 (2000)
- 3) David O. Smallwood, Sound and Vibration, October, 18-24(2005)
- 4) A.Steinwolf, Probabilistic Engineering Mechanics, 14, 289-299 (1999)
- 5) 理論地震動研究会編、"地震動 その合成と波形処理"、鹿島出版会、1994
- 6) 和泉正哲、勝倉裕、日本建築学会論文報告集、第 327 号、20-27(1983)
- 7) S.R.Winterstein, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 114(10), 1772 -1790 (1988)

(原稿受付 2010 年 10 月 8 日)

(審査受理 2010 年 11 月 17 日)