

純曲げが働く際の両面段ボールの反り変形解析 (上下同素材ライナーの段ボール)

松島 理* 松島成夫**

Carl Analysis for Single Wall Corrugated Fiberboard under Uniform Bending (On Fiberboard made of Same Surface liner)

Satoru MATSUSHIMA* Shigeo MATSUSHIMA**

一様曲げを受ける両面段ボール [上下表面のライナー (KL) は同素材] の反り変形の弾性表示を導出し、その表示によって反り変形の特性状況を議論した。得られた結果は以下の通りである。流れ方向曲げの際、中芯の反り変形は KL のものと大きく異なり、KL・中芯接合部の KL・中芯接合面に生じるその不連続変形の補正変形によって残留応力が生じる。流れ方向曲げによって生じる中芯の残留応力 $\Delta\sigma_{sy}$ の値は KL 残留応力 $\Delta\sigma_{ky}$ の 10^4 倍の程度であり、KL の曲げ応力 σ_{kx} の $1/10$ 程度である。そして、その残留応力に伴って生じる KL・中芯接合部の KL・中芯接合面に働く平均せん断応力の値は σ_{kx} と同程度である。横方向曲げの際、変形補正に伴う残留応力は生じない。流れ方向曲げおよび横方向曲げによる反り変形と曲げ変形との比は各ポアソン比に等しい。

キーワード：計算力学、構造解析、弾性解析、数値解析、段ボール強度、包装設計、構造曲げ、弾性曲げ

A elastic formulation on the carl deformation for single wall fiberboard [SWCF : upper and lower surface liners (KL) made of same element] under uniform bending was performed, and characteristic behaviors of the warp deformation were discussed by the formulation. Obtained results are as follows :

A warp under machine (MD) direction bending is obviously different from one under cross direction (CD), and residual stress is made by the accommodation of the discontinuous deformation induced on the contact surface of KL and corrugating semichemical medium (SCM) under machine direction bending. The value of residual stress $\Delta\sigma_{sy}$ for SCM on the KL·SCM joint contact surface is nearly $10^4 \times \Delta\sigma_{ky}$ ($\Delta\sigma_{ky}$: residual stress for KL) and is nearly $\sigma_{kx}/10$ (σ_{kx} : bending stress at the surface KL). The mean shear stress τ for SCM on the KL·SCM joint contact surface is induced by the residual stress, and the value of τ is same order to σ_{kx} . And residual stress is not induced under cross direction bending. Ratios of warp deformations to bending deformations under bending of machine and cross directions is nearly equal to Poisson's ratio respectively.

Keywords : Computational Mechanics, Structure Analysis, Elastic Analysis, Numerical Analysis, Strength of Corrugated Fiberboard, Package Design, Structure Bending, Elastic Bending

*愛媛大学地域共同研究センター (〒790-8577 松山市文京町3番) : Center for Corporative Research and Development, Ehime University 3 Bunkyou-cho, Matsuyama-shi, Ehime, 790-8577, Japan

**愛媛大学名誉教授 : Professor Emeritus

1. 緒言

段ボールは、軽くて、生産性に富み、優れた力学的構造特性を有し、包装材および包装用箱材として盛んに用いられている。したがって、段ボールの利用、改善のために、変形強度の解析をおこなうことは、強度設計上、重要なことである。

段ボールの実用的研究には、既に、段ボール強度に関するものがあり^{1)~3)}、最近でもおこなわれているもの^{4) 5)}がある。

段ボールの基礎的な研究には、引張り変形強度に関する異方性変形表示として、実験的に議論したものがあり⁶⁾、弾性解析によって議論したものがあり⁷⁾、等方弾性体波板に関する曲げ剛性についてのもの⁸⁾がある。

さらに、流れ方向（曲げモーメント軸が横方向）^{9) 10)} および横方向（曲げモーメント軸が流れ方向）^{11) 12)} の曲げに関するもの、接合部の変形強度に関するものがある¹³⁾。曲げ変形に関する異方性変形表示の基礎的研究については、素材の形状および材質を配慮した弾性縦曲げ強度に関するもの、両曲げが組合わさった段ボール板の曲げに関するものがある¹⁴⁾。

一方、段ボールの反りに関する研究¹⁵⁾は少なく、内部構造の変形を考慮した純曲げによる反り変形を基礎的研究として議論したものは見受けられない。段ボールは包装材として盛んに用いられ、使用時常に曲げ変形が生じ、それに伴う反りが生じるものと考えられ、曲げに伴う反り変形を明らかにすることは重要なことであると考えられる。

そこで、本研究では、素材の異方性および幾何学的構造を考慮した純曲げに伴う両面段

ボール [上下ライナー (KL) は同素材] の反り変形表示を導出し、その反り変形の解析をおこない、それを議論することを試みた。中芯の形状は、前報^{9)~14)} にならい正弦波であるとした。

2. 解析方法

両面段ボールの KL は平板であるが、中芯は流れ方向に沿って周期的に変化する。そのため流れ方向曲げ（モーメント軸が横方向）の変形状況は横方向曲げ（モーメント軸が流れ方向）のものとは大きく異なるものと考えられ、それに伴う反り変形も異なるものと考えられる。そこで、まず、両面段ボールの流れ方向、厚さ方向および横方向を x 、 y および z 方向に、中芯の厚さ T_s 、および波高 h の中心を原点にする座標を考える (Fig. 1 参照)。

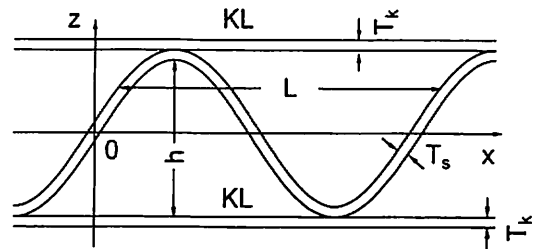


Fig. 1 SCM and KL for SWCF.

中芯の形状を近似的に正弦波形であるとし、その厚さ中央の位置 z_0 および着目位置 z を

$$z_0 = \frac{h}{2} \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \quad (1)$$

$$z = z_0 + t \cos \theta \quad (2)$$

で表す。その L は中芯の波長、 t は厚さ中央から厚さ方向の距離であり、 θ は

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{dz_0}{dx} \right)$$

である。

最初、比較的簡単な反り変形を示すものと考えられる横方向曲げに伴う反りの状況を議論し、次に、流れ方向曲げに伴う反りの状況を議論する。

2.1 横方向曲げによる反り

一様な横方向曲げを受ける段ボール板は、縦方向の作用力がなく、変形制限のない際、すなわち、その方向の変形条件が自由な際、平面応力状態の変形を示し、Fig. 2 に示すような反りが生じるものと考えられる。

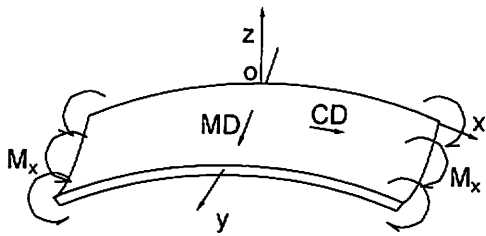


Fig. 2 CD bending and carl for SWCF.

曲げを受ける段ボールは、前報⁹⁾のように、近似的に、KL および中芯の変形は真直はり¹⁶⁾の変形として議論できるものと考えられる。

両面段ボールの横曲げの際、中立層からの距離 z における中芯および KL の曲げ応力 σ_{sy} 、 σ_{ky} は

$$\sigma_{sy} = M_x E_{syz} / R_s \quad (3a)$$

$$\sigma_{ky} = M_x E_{kyz} / R_s \quad (3b)$$

$$R_s = (2E_{ky} I_k + E_{sy} I_s)$$

で表される¹⁸⁾。 M_x は横方向曲げの作用モーメント (単位幅当たり)、 E_{sy} 、 E_{ky} は中芯、KL の横方向の縦弾性係数であり、 I_s および I_k は中芯および KL の断面 2 次モーメント

$$I_s = 2 \int_{-L/4}^{L/4} \frac{T_s z_0^2}{L} ds \quad (4a)$$

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx$$

$$I_k = \frac{T_k^3}{12} + T_k \left(\frac{h + 2T_k + T_s}{2} \right)^2 \quad (4b)$$

である。その曲げひずみ ϵ_{sy} 、 ϵ_{ky} は

$$\epsilon_{sy} = \sigma_{sy} / E_{sy} = M_x z / R_s \quad (5a)$$

$$\epsilon_{ky} = \sigma_{ky} / E_{ky} = M_x z / R_s \quad (5b)$$

で表され、それに応じた流れ方向の変形は反りとなって生じ、そのひずみ ϵ_{sb0} 、 ϵ_{kx0} は

$$\epsilon_{sb0} = \nu_{syb} \epsilon_{sy} \quad (6a)$$

$$\epsilon_{kx0} = \nu_{kyb} \epsilon_{ky} \quad (6b)$$

で表される。 ν_{syb} 、 ν_{kyb} は横方向引張り変形時の流れ方向ひずみ寄与を示す中芯、KL のポアソン比である。この際、位置 $x = L/4$ 、 $z = (h + T_s) / 2$ における KL と中芯のひずみ ϵ_{sb0}^* 、 ϵ_{kx0}^* は等しくなり、

$$\epsilon_{sb0}^* = \epsilon_{kx0}^* \quad (7)$$

で表され、その曲率半径 ρ_{sb} は

$$\rho_{sb} = h / (2\epsilon_{sb0}^*) \quad (8)$$

で表される。

式(7)より、曲げに伴う反り変形の連続性が満たされていることがわかる。

2.2 縦方向曲げによる反り

一様な流れ方向曲げを受ける段ボール板は、Fig. 3 に示すような反りが生じるものと考えられる。

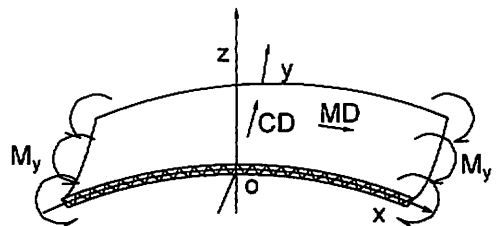


Fig. 3 MD bending and carl for SWCF.

曲げを受ける段ボールは、前報¹⁴⁾によると、近似的に、KLの変形は真直はり、中芯の変形は曲がりはりの変形理論¹⁷⁾によって議論できる。

中芯の流れ方向曲げ変形による中芯の曲げ応力 σ_{sb} は

$$\sigma_{sb} = \frac{N_{sb}}{T_s} + \frac{1}{T_s \rho} \left[1 + \frac{1}{\kappa} \frac{t}{\rho + t} \right] M_{sy} \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{1}{3} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^6 + \dots$$

$$\rho = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2 z_0}{dx^2}}$$

で表される。 N_{sb} および M_{sx} は中芯着目位置 x 、 z の軸力およびモーメント

$$N_{sb} = -W_{sx} \sin \theta + W_{sx} \cos \theta \quad (10a)$$

$$M_{sy} = M_{s0} - W_{sx} (h/2 - z_0) + W_{sz} (L/4 - x) \quad (10b)$$

である。ただし、 W_{sx} 、 M_{s0} は KL・中芯接合部の x 方向の作用力、固定モーメント

$$W_{sx} = (C_1 B_2 - C_2 B_1) / (A_1 B_2 - A_2 B_1) \quad (11a)$$

$$M_{s0} = (A_1 C_2 - A_2 C_1) / (A_1 B_2 - A_2 B_1) \quad (11b)$$

であり¹¹⁾、 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 および $B_0(\theta)$ は

$$A_1 = \frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{x=-L/4}^{x=L/4} \left[\cos \theta - B_0(\theta) \left(\frac{h}{2} - z_0 \right) \right] \times \left(\frac{L}{4} - x \right) d\theta$$

$$A_2 = \frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{x=-L/4}^{x=L/4} \left[\cos \theta - B_0(\theta) \left(\frac{h}{2} - z_0 \right) \right] d\theta$$

$$B_1 = \frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{x=-L/4}^{x=L/4} B_0(\theta) \left(\frac{L}{4} - x \right) d\theta$$

$$+ \frac{L^2}{16E_{kx} I_k}$$

$$B_2 = \frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{x=-L/4}^{x=L/4} B_0(\theta) d\theta + \frac{L}{4E_{kx} I_k}$$

$$C_1 = L^2 / (16E_{kx} I_k), C_2 = L / (4E_{kx} I_k)$$

$$B_0(\theta) = (1 + \kappa) / (\rho \kappa)$$

である¹¹⁾。 E_{sb} 、 E_{kx} は中芯、KLの縦方向の縦弾性係数である。また、段ボール中立層からの距離 z にあるKLの曲げ応力 σ_{ky} は

$$\sigma_{ky} = M_{ky} z / I_k \quad (12a)$$

$$M_{ky} = (M_y - M_{sy}) / 2 \quad (12b)$$

で表される。 M_y は段ボールに働く流れ方向曲げの作用モーメントである。

中芯およびKLの流れ方向曲げひずみ ϵ_{sb} および ϵ_{kx} は

$$\epsilon_{sb} = \sigma_{sb} / E_{sb} \quad (13a)$$

$$\epsilon_{kx} = \sigma_{kx} / E_{kx} \quad (13b)$$

で表され、それに伴う反りのひずみ ϵ_{sy0} 、 ϵ_{ky0} は

$$\epsilon_{sy0} = \nu_{sby} \epsilon_{sb} \quad (14a)$$

$$\epsilon_{ky0} = \nu_{kxy} \epsilon_{kx} \quad (14b)$$

で表される。 ν_{sby} 、 ν_{kxy} は、縦方向引張り変形時の横方向ひずみ寄与を示す中芯、KLのポアソン比であり、

$$\nu_{sby} = (E_{sb} / E_{sy}) \nu_{sby} \quad (15a)$$

$$\nu_{kxy} = (E_{kx} / E_{ky}) \nu_{kxy} \quad (15b)$$

で表される¹⁴⁾。この際、一般に、KL・中芯接合部の位置 $x = L/4$ 、 $z = (h + T_s) / 2$ における中芯のひずみ ϵ_{sy0}^* の値はKLのひずみ ϵ_{ky0}^* と異なり、

$$\epsilon_{sy0}^* \neq \epsilon_{ky0}^* \quad (16a)$$

$$\Delta \epsilon_{y0} = \epsilon_{sy0}^* - \epsilon_{ky0}^* \neq 0 \quad (16b)$$

になるものと考えられる。

実際のKL・中芯接合部の変形は連続である。すなわち、この不連続な個々の状態を連続な変形にする表示を求めることが必要であり、不連続変形状態を示す式(16b)の補正変

形を考慮する必要がある。その補正変形は、外力の作用がゼロの力学的条件下で、KL・中芯接合部位置の力の釣合いを満たすことが必要である。すなわち、補正変形によって生じる位置 $x = L/4$ 、 $z = (h + T_s)/2$ の中芯側および KL 側の力 ΔF_{sy} 、 ΔF_{ky} は

$$\Delta F_{sy} = \Delta F_{ky} \quad (17a)$$

$$\Delta F_{sy} = E_{sy} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \Delta \epsilon_{sy} dz \quad (17b)$$

$$\Delta F_{ky} = 2 E_{ky} \int_{z=z_{00}-T_k/2}^{z=z_{00}+T_k/2} \Delta \epsilon_{ky} dz \quad (17c)$$

$$z_{00} = (h + T_s)/2$$

を満たすことが必要である。 $\Delta \epsilon_{sy}$ 、 $\Delta \epsilon_{ky}$ は変形に必要な中芯および KL の位置 $x = L/4$ 、 $z = (h + T_s)/2$ の補正ひずみである。そこで、 $\Delta \epsilon_{sy}$ 、 $\Delta \epsilon_{ky}$ を

$$\Delta \epsilon_{sy} = \Delta \epsilon_{sy0} R \quad (18a)$$

$$\Delta \epsilon_{ky} = \Delta \epsilon_{ky0} R \quad (18b)$$

$$R = 2z/(h + T_s)$$

で表すと、 ΔF_{sy} 、 ΔF_{ky} は

$$\begin{aligned} \Delta F_{sy} &= E_{sy} \Delta \epsilon_{sy0} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} R dz \\ &= E_{sy} \Delta \epsilon_{sy0} A_s \end{aligned} \quad (19a)$$

$$A_s = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} R dz$$

$$\begin{aligned} \Delta F_{ky} &= 2 E_{ky} \Delta \epsilon_{ky0} \int_{z=z_{00}-T_k/2}^{z=z_{00}+T_k/2} R dz \\ &= E_{ky} \Delta \epsilon_{ky0} A_k \end{aligned} \quad (19b)$$

$$A_k = 2T_k(h + T_s + T_k)/(h + T_s)$$

で表せる。位置 $x = L/4$ 、 $z = (h + T_s)/2$ における力および変位 (また、ひずみ) の連続性により、関係

$$E_{sy} \Delta \epsilon_{sy0} A_s = E_{ky} \Delta \epsilon_{ky0} A_k \quad (20a)$$

$$\Delta \epsilon_{y0} = \Delta \epsilon_{sy0} + \Delta \epsilon_{ky0} \quad (20b)$$

が成り立つ。これより、 $\Delta \epsilon_{sy0}$ 、 $\Delta \epsilon_{ky0}$ は

$$\Delta \epsilon_{sy0} = \frac{\Delta \epsilon_{y0} E_{ky} A_k}{E_{sy} A_s + E_{ky} A_k} \quad (21a)$$

$$\Delta \epsilon_{ky0} = \frac{\Delta \epsilon_{y0} E_{sy} A_s}{E_{sy} A_s + E_{ky} A_k} \quad (21b)$$

で表される。そして、 $\Delta \epsilon_{sy0}$ 、 $\Delta \epsilon_{ky0}$ に伴って生じる中芯および KL の応力 $\Delta \sigma_{sy0}$ 、 $\Delta \sigma_{ky0}$ は

$$\Delta \sigma_{sy} = \Delta \epsilon_{sy0}/E_{sy} \quad (22a)$$

$$\Delta \sigma_{ky} = \Delta \epsilon_{ky0}/E_{ky} \quad (22b)$$

で表せ、これに応じた曲率半径補正值 $\Delta \rho_{sy}$ 、 $\Delta \rho_{ky}$ は

$$\Delta \rho_{sy} = z_{00}/\Delta \epsilon_{sy0} \quad (23a)$$

$$\Delta \rho_{ky} = z_{00}/\Delta \epsilon_{ky0} \quad (23b)$$

で表せる。

式 (16b) より $\Delta \epsilon_{y0}$ が求まり、式 (21a、b) より $\Delta \epsilon_{sy0}$ 、 $\Delta \epsilon_{ky0}$ が求まり、式 (22a、b)、(23、b) により $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{ky}$ 、 $\Delta \rho_{sy}$ 、 $\Delta \rho_{ky}$ が明らかになる。

3. 解析結果および考察

一般に、使われている両面段ボールの形状¹⁸⁾に合わせ、議論に用いる規準段ボールの KL および中芯の厚さを $T_k = 0.30$ mm および $T_s = 0.24$ mm、中芯の波長および波高を $L = 9.2$ mm および $h = 4.6$ mm にする。そして、中芯の縦弾性係数は縦方向 $2.2 \sim 2.4 \times 10^4$ 、横方向 $1.1 \sim 1.3 \times 10^4$ (N/mm²)¹⁹⁾、KL の係数は、縦方向 6.28×10^4 、横方向 2.42×10^4 (N/mm²)²⁰⁾ であるが、便宜上、前報³²⁾にならひ、 $E_{sb} = 1.00$ 、 $E_{sy} = 1.00$ 、 $E_{kx} = 2.64$ 、 $E_{ky} = 1.00$ (N/mm²) とし、ポアソン比は 0.1 程度である^{15) 20)} ことが示されているが、 $\nu_{sby} = \nu_{kxy} = 0.10$ とした。また、 $M_x = M_y$

= 1.0 N とした。

段ボールの横方向曲げに伴う流れ方向曲がりの曲率半径 $\rho_x [= \rho_{sb}(z = z_{00})]$ は、式 (5a)、(8) より、

$$\rho_x = z_{00} / \varepsilon_{sb0}^* = 39.67 \text{ mm}$$

で表される。

段ボールの横方向曲げに伴う $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{ky}$ の値は、式 (20a、b) ~ (23a、b) より

$$\Delta \sigma_{sy} = 1.187 \times 10^{-2} \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta \sigma_{ky} = 6.496 \times 10^{-6} \text{ N/mm}^2$$

で表せ、それら曲率半径は各

$$\Delta \rho_{sy} = R / \Delta \varepsilon_{sy0} = 1.0194 \times 10^2 \text{ mm}$$

$$\Delta \rho_{ky} = R / \Delta \varepsilon_{ky0} = 3.7253 \times 10^2 \text{ mm}$$

で表せる。式 (14a、b) より

$$\varepsilon_{sy0}^* = 6.344 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{ky0}^* = 2.311 \times 10^{-2}$$

で表せ、それら曲率半径は各

$$\rho_{sy} = R / \varepsilon_{sy0}^* = 3.968 \times 10^3 \text{ mm}$$

$$\rho_{ky} = R / \varepsilon_{ky0}^* = 3.815 \times 10^2 \text{ mm}$$

で表せる。

横方向曲げによって生じる中芯および KL の最大値は外表面に生じ、流れ方向曲げによって生じる中芯の最大値は内表面に、KL は外表面に生じる¹¹⁾。そして、反り変形に伴う曲げ応力は x および t によって変化する。

そこで、まず、応力 $\sigma_{sb}(t = -T_s/2)$ 、 $\sigma_{sb}(t = -T_s/2)$ 、 $\sigma_{kx}(t = T_k/2)$ および $\sigma_{sy}(t = T_s/2)$ 、 $\sigma_{ky}(t = -T_k/2)$ と x の関係を求め、反りによって生じる $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{ky}$ と x との関係を求めた。それを Fig. 4 に示す。同図より、 $x = -L/4 \sim L/4$ の域では、 x の増加に伴って、 $\sigma_{sb}(t = -T_s/2)$ 、 $\sigma_{sb}(t = T_s/2)$ は減少し、 $\sigma_{sy}(t = T_s/2)$ は増加するが、 $\sigma_{kx}(t = -T_k/2)$ 、 $\sigma_{ky}(t = T_k/2)$ 、 $\Delta \sigma_{sy}(t = T_k/2)$ 、 $\Delta \sigma_{ky}(t = -T_k/2)$ はほぼ

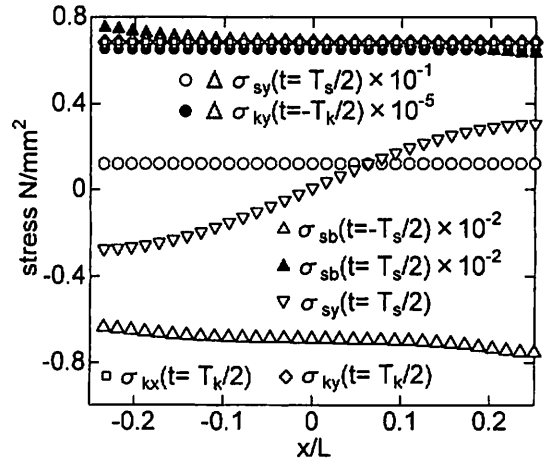


Fig. 4 Relationships between bending and cart stresses and position x .

一定な値を示すことがわかる。そして、 $\sigma_{sb}(t = -T_s/2)$ は負値で、 $x = L/4$ 、 $t = -T_s/2$ に $|\sigma_{sb}|$ の最大値があり、その σ_{ky} 、 σ_{kx} 、 σ_{ky} の最大値は z 最大の位置にある。

次に、横方向曲げにおける中芯、KL の応力 $\sigma_{sy}(x = L/4)$ 、 $\sigma_{ky}(x = L/4)$ および流れ方向の応力 $\sigma_{sb}(x = 0)$ 、 $\sigma_{sb}(x = L/4)$ 、 $\sigma_{kx}(x = L/4)$ と t の関係を求め、反りによって生じる応力 $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{ky}$ との t との関係性を求めた。その関係を Fig. 5 に示す。同図より、 $t = -T_s/4 \sim T_s/4$ 、 $t = -T_k/4 \sim T_k/4$ の域では、 t の増加に伴って、 σ_{sb} および σ_{kx} 、 σ_{ky} 、 $\Delta \sigma_{ky}$ は増加することがわかり、 σ_{sy} 、 $\Delta \sigma_{sy}$ はほぼ一定であることがわかる。とくに、 σ_{sb} の増加は顕著である。

構造物の強度は最大応力によって、変形に伴う形状変化は曲率半径によってよく議論される。形状の変化による応力状況および変形状況を明らかにするために、 σ_{sb} 、 σ_{sy} 、 σ_{sx} 、 σ_{ky} 、 $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{sx}$ の最大値および ρ_{sb} 、 ρ_{sy} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta \rho_{sy}$ 、 $\Delta \rho_{ky}$ と L との関係を求め Fig. 6 に示した。次に、それらの応力および曲率

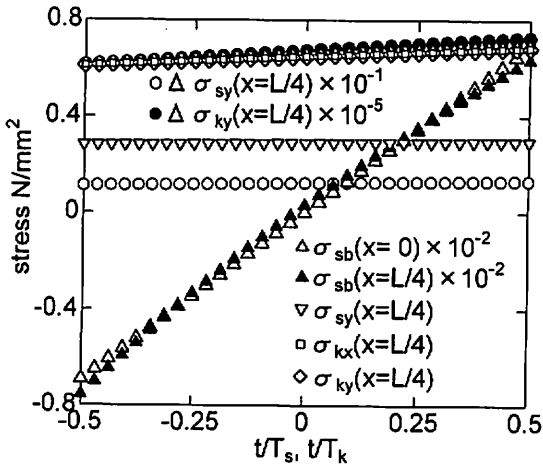


Fig. 5 Relationships between bending and cart stresses and position t.

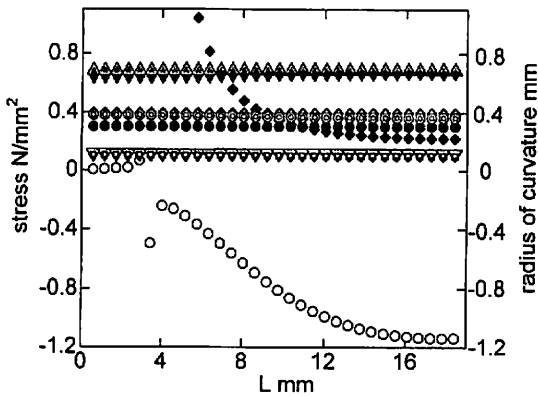


Fig. 6 Relationships between maximum stresses, radii of curvature and L.

[○: $\sigma_{sb}(x=L/4, t=-T_s/2) \times 10^{-2}$, ●: $\sigma_{sy}(x=L/4, t=T_s/2)$, △: $\sigma_{kx}(t=T_k/2)$, ▲: $\sigma_{ky}(t=T_k/2)$, ▽: $\Delta \sigma_{sy}(x=L/4, t=T_s/2) \times 10^{-1}$, ▽: $\Delta \sigma_{ky}(x=L/4, t=-T_k/2) \times 10^{-5}$, ◇: $\rho_{sb} \times 10^2$, ◆: $\rho_{sy} \times 10^4$, □: $\rho_{ky} \times 10^3$, ■: $\Delta \rho_{sy} \times 10^3$, ◎: $\Delta \rho_{ky} \times 10^6$]

半径と h との関係性を求め Fig. 7 に示した。

Fig. 6 より、 $|\sigma_{sb}| = \infty$ の生じない域 ($L > 3.8$ mm) では、L の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ の最大値は顕著に増加し、 ρ_{sy} は顕著に減少するが、 $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{ky}$ の値はごく僅か増加し、 $\Delta \rho_{ky}$ は僅か減少することがわかる。そして、 σ_{sy} 、 σ_{kx} 、 σ_{ky} 、 ρ_{sb} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta \rho_{sy}$ はほぼ一定な値を示すことがわかる。Fig. 7 より、h の

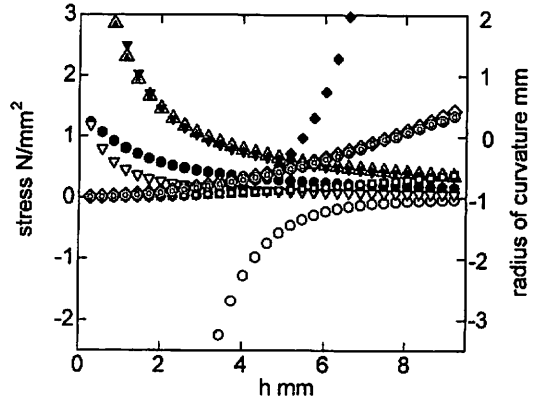


Fig. 7 Relationships between maximum stresses, radii of curvature and h. (Signs are denoted in Fig. 6.)

増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ 、 σ_{sy} 、 σ_{kx} 、 σ_{ky} 、 $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{kx}$ の最大値は顕著に減少し、 ρ_{sb} 、 ρ_{sy} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta \rho_{sy}$ 、 $\Delta \rho_{ky}$ は顕著に増加することがわかる。

また、 σ_{sb} 、 σ_{sy} 、 σ_{kx} 、 σ_{ky} 、 $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{kx}$ の最大値および ρ_{sb} 、 ρ_{sy} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta \rho_{sy}$ 、 $\Delta \rho_{ky}$ と T_s および T_k との関係性を求めた。その関係を Fig. 8、9 に示す。

Fig. 8 より、 $\sigma_{sx} \neq \infty$ の域 ($T_s < 0.7$ mm) では、 T_s の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ の値は顕著に増加し、 ρ_{sy} は顕著に減少することがわかり、 σ_{sy} 、 σ_{kx} 、 σ_{ky} 、 $\Delta \sigma_{sy}$ 、 $\Delta \sigma_{kx}$ の値は緩

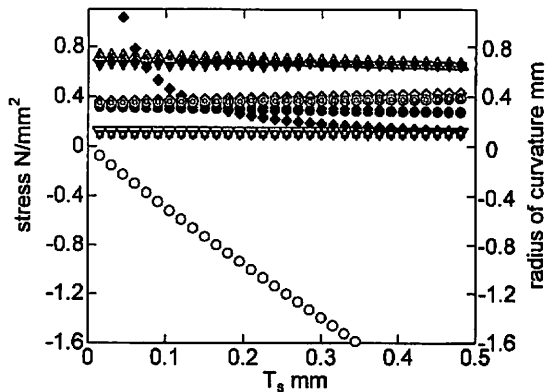


Fig. 8 Relationships between maximum stresses, radii of curvature and T_s . (Signs are denoted in Fig. 6.)

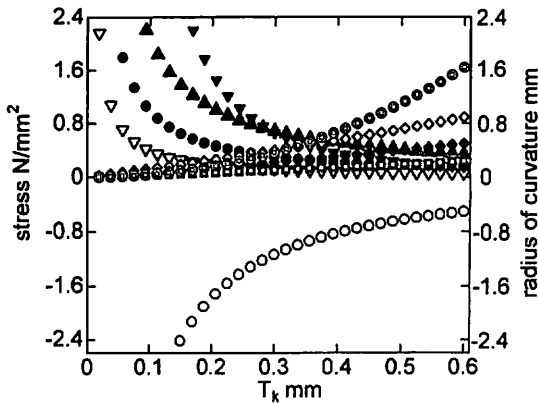


Fig. 9 Relationships between maximum stresses, radii of curvature and T_k . (Signs are denoted in Fig. 6.)

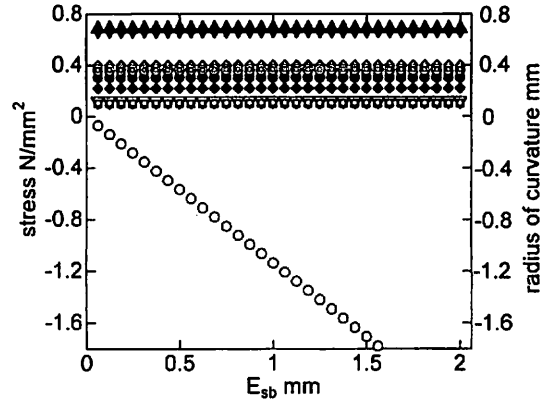


Fig. 10 Relationships between maximum stresses, radii of curvature and E_{sb} . (Signs are denoted in Fig. 6.)

やかに減少し、 ρ_{sb} 、 ρ_{sy} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta\rho_{sy}$ 、 $\Delta\rho_{ky}$ は緩やかに増加することがわかる。Fig. 9 より、 T_k の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ 、 σ_{sy} 、 σ_{kx} 、 σ_{ky} 、 $\Delta\sigma_{sy}$ 、 $\Delta\sigma_{kx}$ の値は顕著に減少し、 ρ_{sb} 、 ρ_{sy} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta\rho_{sy}$ 、 $\Delta\rho_{ky}$ は顕著に増加することがわかる。とくに、 σ_{sy} 、 $\Delta\rho_{ky}$ の増加が目立つ。

素材の特性値の変化による応力状況および変形状況を明らかにするために、 σ_{sb} 、 σ_{sy} 、 σ_{kx} 、 σ_{ky} 、 $\Delta\sigma_{sx}$ 、 $\Delta\sigma_{sy}$ の最大値および ρ_{sb} 、 ρ_{sy} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta\rho_{sy}$ 、 $\Delta\rho_{ky}$ と E_{sx} および E_{sb} との関係性を求め、その関係を Fig. 10、11 に示す。

Fig. 10 より、 E_{sb} の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ の値はほぼ正比例的に顕著に増加するが、 σ_{sy} 、 σ_{ky} 、 σ_{ky} の値、 $\Delta\sigma_{sy}$ 、 $\Delta\sigma_{ky}$ 、 ρ_{sb} 、 ρ_{sy} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta\rho_{sy}$ 、 $\Delta\rho_{ky}$ はほぼ一定な値を示すことがわかる。Fig. 11 より、 E_{kx} の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ 、 $\Delta\sigma_{sy}$ 、 $\Delta\sigma_{ky}$ の値は大きく減少するが、 ρ_{sy} 、 ρ_{ky} 、 $\Delta\rho_{sy}$ 、 $\Delta\rho_{ky}$ は、ほぼ比例して、顕著に増加することがわかり、 σ_{sy} 、 σ_{kx} 、 σ_{ky} 、 ρ_{sb} の値はほぼ一定な値を示すことがわかる。

流れ方向曲げによって生じる見掛け上の反

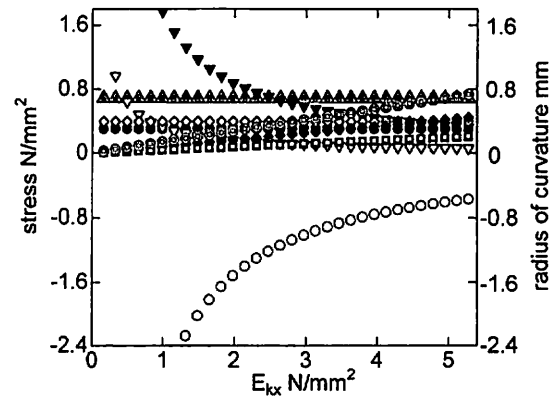


Fig. 11 Relationships between maximum stresses, radii of curvature and E_{kx} . (Signs are denoted in Fig. 6.)

り変形は小さい。しかし、反りに伴う応力 $\Delta\sigma_{sy}$ および $\Delta\rho_{sy}$ は段ボールの全体的変形の補正として生じるものであり、分布状態は段ボールの全体的変形に最も近い KL の変形（曲げ変形）に類似することが窺える。

流れ方向曲げの際、 $\Delta\sigma_{sy}$ が生じ、KL 中芯接合部の幅間 ΔL で、接合部間の KL からの作用力 $\Delta\sigma_{sy}$ が生じ、その幅間にせん断応力 τ (平均の $\tau = \Delta\sigma_{sy} \Delta L / (L - \Delta L)$) が生じるものと考えられ、Fig. 12 に示すような変位状態が生じているものと考えられる。そ

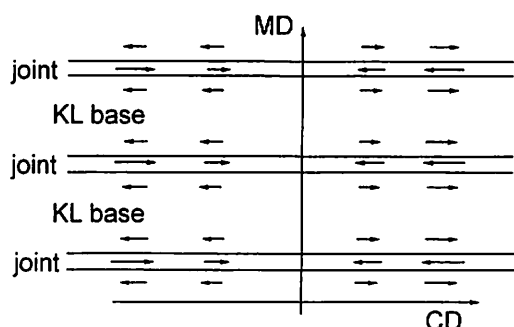


Fig. 12 Shear displacements of KL and SCM about KL·SCM joint under machine direction bending.

して、この τ の値はKLの曲げ応力 σ_{kx} 程度である。したがって、このせん断応力に伴う接合部付近の応力分布状況をより詳細に議論することが必要であるものと考えられる。また、横曲げの際にも、曲げに伴うKL・中芯接合部に同様なせん断応力が生じるものと考えられ、この応力状況を明らかにすることが必要であるものと考えられる。

以上のことより、中芯の段ボール反り変形への影響は小さいものとみなされ、反りは、主に、KLの曲げ変形によって生じる伸び、縮みのひずみに伴う横ひずみによるKLの伸び、縮みによって生じることがわかった。しかし、中芯は上下表面KLの間隔保持の役割なし、段ボールの反り変形に対し重要な役割を果たしているものと考えられる。

これらのことにより、一様曲げ変形を受ける両面段ボールの本反り変形表示は曲げを受ける両面段ボールの反りに関する基本的変形議論に役立つものと考えられる。

4. 結 言

一様曲げを受ける両面段ボール [上下同素材のライナー (KL)] の反りの変形表示を求

め、その変形解析を議論した。段ボールの流れ方向、横方向をx方向、y方向とし、段ボール中芯の厚さ T_s および高さ h の中央位置を原点として座標を定める。一般に使われている両面段ボールの形状に合わせ、KLの厚さ $T_{k1} (= T_{k2})$ を0.30 mmに、中芯の T_s を0.24 mmに、中芯の波長 L を9.2 mmに、 h を4.6 mmにしたもの、中芯のx、y方向の縦弾性係数を $E_{sb} = 1.00$ 、 $E_{sy} = 0.50$ 、 $E_{kx} = 2.64$ 、 $E_{ky} = 1.00$ ($\times 10^4 \text{ N/mm}^2$)とし、KL、中芯の横方向ひずみの縦方向ひずみへの寄与を示すポアソン比 ν_{kxy} 、 ν_{sby} を0.10としたものを規準とし、x、y方向の曲げを起こすモーメント (単位幅当たり) を1 Nとして議論する。得られた主な結果については、以下の通りである。

(1) 曲げ変形量とそれに伴う反りの変形量は、流れ方向、横方向の曲げによらず、ほぼ、曲げ変形量とポアソン比との積で表される。横方向曲げに伴って生じる加工方向の反りによる残留応力は生じないが、流れ方向曲げの横方向の反りによる中芯の残留応力 $\Delta\sigma_{sy}$ の値はそのKLの曲げ応力 σ_{kx} とポアソン比との積程度である。

(2) $x = -L/4 \sim L/4$ の域では、 $\Delta\sigma_{sy}$ はxおよび中芯の厚さ中央からの距離 t の増加に伴って増加する。KLの残留応力の絶対値 $|\Delta\sigma_{ky}|$ は小さく、KL・中芯接合部の $\Delta\sigma_{sy}$ 最大値の 10^{-4} 程度である。

(3) L の増加に伴って、横方向曲げによる中芯の曲げ応力絶対値 $|\sigma_{sb}|$ の最大値は顕著に増加し、 $\Delta\sigma_{sy}$ の最大値は僅か増加し、流れ方向曲げに伴う見掛けの曲率半径 ρ_{sy} 、補正曲率半径 $\Delta\rho_{sy}$ は、 L の増加によって変化せず、ほぼ、一定な値を示す。 h の増加に伴

って、 $|\sigma_{sb}|$ 、 $\Delta\sigma_{sy}$ の最大値は顕著に減少するが、横方向曲げによる中芯縦方向の見掛けの曲率半径 ρ_{sb} 、その補正曲率半径 $\Delta\rho_{sy}$ は顕著に増加する。

(4) T_s の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ の最大値は顕著に増加し、 $\Delta\sigma_{sy}$ は僅か減少し、 ρ_{sb} 、 $\Delta\rho_{sy}$ は僅か増加する。 T_k の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ 、 $\Delta\sigma_{sy}$ の最大値は顕著に減少し、 ρ_{sb} 、 $\Delta\rho_{sy}$ は顕著に増加する。

(5) E_{sx} の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ の最大値は顕著に増加する。 $\Delta\sigma_{sy}$ の最大値、 ρ_{sy} 、 $\Delta\rho_{sy}$ の変化は僅かであり、その値は、ほぼ、一定とみなせる。 E_{kx} の増加に伴って、 $|\sigma_{sb}|$ 、 $\Delta\sigma_{sy}$ の最大値は大きく減少し、 $\Delta\rho_{sy}$ は大きく増加する。 ρ_{sb} は、 E_{kx} の変化によらず、ほぼ、一定な値を示す。

(6) $\Delta\sigma_{sy}$ の生成に伴い、KL・中芯接合部に、KLの曲げ応力程度のせん断応力が生じる。

以上のように、素材構成に基づく曲げ変形を議論し、曲げに伴う反りの変形機構を明らかにすることは、段ボールの弾性曲げに伴う反り変形を議論する上に、重要なことであると考えられる。

したがって、以上の諸応力および変形の特徴値の変化、分布状況より、一様曲げを受ける両面段ボールの弾性解析による反り変形の結果は、妥当なものであると考えられ、一様曲げを受ける段ボールの反り変形の議論に対し有効なものであると考えられる。

<参考文献>

- 1) 例えば、段ボール実用百科編集委員会：
段ボール実用百科、一律書房、21-26
(1970)
- 2) 例えば、レンゴー株式会社：段ボール技

術、包装新聞社、16-21 (1971)

- 3) J. W. Koning Jr. and R. Stern : Tappi, 60
(12), 128-131 (1977) ; G. G. Maltenfort
: Tappi, 53 (11), 1076-1079 (1970) ; P.
Grartaganis : Tappi, 58 (11), 102-108
(1975) ; R. M. Morris Jr. and G. P. Val-
low : Tappi, 58 (11), 110-113 (1975)
- 4) 川端洋一、日本包装学会誌、6 (1)、
19-23 ; 24-29 (1997)
- 5) 川端洋一、日本包装学会誌、7 (2)、
63-70 (1998)
- 6) 松島成夫、奥田隆宏、宮内治、野沢光治、
紙パ技協誌、36 (3)、377-387 (1982)
- 7) 松島理、松島成夫、紙パ技協誌、54 (7)、
986-995 (2000)
- 8) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky
Krieger : Theory of Plates and Shells,
McGraw-Hill Co., 366-369 (1959)
- 9) 松島成夫、矢野忠、松島晟、横田俊昭、
紙パ技協誌、46 (5)、668-678 (1992)
- 10) 松島成夫、矢野忠、松島晟、横田俊昭、
紙パ技協誌、45 (4)、480-491 (1991) ;
47 (4)、517-528 (1993) ; 松島成夫、矢
野忠、松島理、紙パ技協誌、48 (8)、
600-611 (1994) ; 49 (6)、956-966 (1995)
- 11) 松島理、松島成夫、日本機械学会論文集、
60 (A576)、1814-1820 (1994)
- 12) 松島理、松島成夫、日本機械学会論文集、
61 (A587)、1601-1607 (1995) ; 63 (A587)、
1525-1562 (1997) ; 松島理、松島成夫、
紙パ技協誌、50 (9)、1299-1310 (1996)
; 51 (9)、1356-1365 (1996)
- 13) 松島理、松島成夫、紙パ技協誌、51 (4)、
645-652 (1997) ; 51 (4)、707-716 (1997)
; 松島理、松島成、:日本包装学会誌、5

- (3)、211-221 (1996) ; 6(3)、60-70 (1997)
; 6(5)、258-267 (1997)
- 14) 松島理、松島成夫、日本機械学会論文集、
64(A618)、415-421 (1998)
- 15) 石淵浩、三村稔、吉沢昭宣、佐久田博司、
吉谷豊、日本機械学会論文集、59(A557)、
156-162 (1993)
- 16) 例えば、清家政一郎、材料力学、共立出
版、23-46 (1967)
- 17) 例えば、黒木剛司郎、材料力学、森北出
版、150-156 (1975)
- 18) 1) の 64-69
- 19) 1) の 118-128
- 20) Alan Jones : Tappi, 51 (5)、203-209
(1968)

(原稿受付 2003 年 1 月 20 日)

(審査受理 2003 年 2 月 17 日)