一般論文

段積み・粘弾性支持された製品の線形モデルによる衝撃強さの検討

中嶋隆勝* 斎藤勝彦** 久保雅義**寺岸義春*

Linear model study on the fragility of stacked products and product supported viscoelastically

Takamasa NAKAJIMA*, Katsuhiko SAITO** Masayoshi KUBO** and Yoshiharu TERAGISHI*

In order to reduce the volume of packaging materials, it is necessary to evaluate the fragility of product exactly. We studied on the fragility of stacked products and product supported viscoelastically by using 2 kinds of linear models. Model-A that represents the former is a model of 2 spring-mass systems to be connected. And Model-B that represents the latter is a model of a spring-mass system with linear viscous damping. The main results obtained are as follows.
(1) In the case that the mass of Model-A is damaged by shock load, the lower mass is more fragile. And in the case that it is damaged by acceleration, the upper mass is more fragile. Moreover, in the latter case, critical acceleration of damage boundary curve by rectangular shock pulse shows a variation for velocity change.
(2) The closer the damping ratio ζ gets from 0 to 1, the more the response resembles the shape of input shock pulse. Consequently the shock transmissibility approaches 1 and the critical acceleration will be improved.

Keywords : Package, Transportation, Cushioning design, Shock, Mechanical-shock fragility, Linear model, Stack, Viscoelasticity, Product

包装材料の使用量を削減するためには、製品の衝撃強さを正確に評価することが必要である。著者らは2種類の線形モデルを用いて段積みされた製品及び粘弾性的に支持された製品の衝撃強さについて検討した。前者を表す Model-A は2つのばね質量系が連結したモデルであり、後者を表す Model-B は粘性減衰をもつばね質量系のモデルである。得られた主な結論は以下の通りである。
(1) Model-A の各質量部が衝撃荷重によって破損する場合、下段質量部の方が破損し易く、加速度によって破損する場合、上段質量部の方が破損し易い。さらに、後者の場合、方形波衝撃パルスによる損傷境界曲線は許容加速度が速度変化に対して多少変動する特徴がある。
(2) Model-B の減衰比 ζ が0から1に近づくにつれて応答波は入力波形に近づくため、衝撃伝達率は1に近づき、許容加速度が向上する。

キーワード：包装、輸送、緩衝設計、衝撃、衝撃強さ、線形モデル、段積み、粘弾性、製品

*大阪府立産業技術総合研究所（〒594-1157 和泉市あゆみ野2-7-1）：Technology Research Institute of Osaka Prefecture 2-7-1, Ayumino, Izumi, Osaka 594-1157, Japan
**神戸商船大学（〒658-0022 神戸市東灘区深江南町5丁目1-1）：Kobe University of Mercantile Marine 1-1, 5 chome, Fukae-minami-machi, Higashinada-ku, Kobe 658-0022, Japan

記号表

m_1：Model-A の下段部質量
k_1：Model-A の下段のばね定数
x_1：Model-A の下段の変位
m_2：Model-A の上段部質量
k_2：Model-A の上段のばね定数
x_2：Model-A の上段の変位
m：Model-B 及び Model-O の質量
k：Model-B 及び Model-O のばね定数
x_0：衝撃テーブルの変位
t：経過時間
ω_{ij}：固有振動数
c：粘性減衰係数
ζ：減衰比
$\tilde{}$：ラプラス変換後の関数を表す。
$\dot{}$：1階微分係数を表す。
$\ddot{}$：2階微分係数を表す。
U：ステップ関数
T_0：衝撃パルスの作用時間
A_0：衝撃パルスの最大加速度
f_c：1自由度ばね質量系の固有周波数
a：π/T_0
α、β：Model-A では、$s^4+(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2)s^2+\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2$ の正の解を表し、Model-B では $s^2+2\zeta\omega s+\omega^2$ の解を表す。
f_1：衝撃テーブルと下段質量部の間に発生する衝撃荷重
f_2：上段質量部と下段質量部の間に発生する衝撃荷重
f：Model-B に発生する衝撃荷重

1. 緒　言

輸送が終わるとゴミとなる包装材料の使用量はできるだけ削減する必要があるが、輸送中に発生する衝撃から製品を十分に保護する機能も確保しなければならない。そのためには最適緩衝設計を実践することは言うまでもないが、製品衝撃強さを正確に評価することも必要である。また、製品衝撃強さが改善できれば緩衝材使用量を削減できるだけでなく、製品自体の寿命を延ばすことにもつながり、環境問題の観点からも多くの利点がある。

これまでの衝撃試験では、ある定められた加速度と作用時間の正弦半波による衝撃を加え、製品が破損するかどうかの合否判定を行うものがほとんどであった。しかし、JIS Z 0119-1994 及び ASTM D 3332-88 に規定されている包装設計のための製品衝撃強さ試験方法では、許容速度変化と許容加速度の2値で製品衝撃強さを表す[1)] ようになっており、製品衝撃強さを正確に把握するための工夫がなされている。

この規格の理論的な基礎[1)] となっている製品の衝撃モデルは1次元1自由度ばね質量系であるが、Gary J. Burgess は、このモデルでは説明できない製品の破損現象（ソケットの抜けなど）をモデル化（剛塑性モデル）し、検討を加えた[2)]。一方、衝撃試験において、製品中の部品への伝達率が2以上となることが現実に発生しているが、これは1次元1自由度ばね質量系では起こり得ない現象である。

本研究では、従来モデルとは異った衝撃強さ、伝達率となる可能性のあるモデルの例として、1次元に2つのばねと質量が配列したモデルを考え、その衝撃応答を理論解析により求め、衝撃強さ及び伝達率について検討した。本モデルでは2つのばねと質量による相互作用が発生するため、1自由度のばね質量

系とは異なった衝撃強さや伝達率となるのではないかと考えられる。

実際の破壊現象を定量的かつ正確に表現するためには、その問題に特化した非常に複雑なモデルを作成する必要があり、本モデルで実際の衝撃応答をすべて説明することは不可能であるかもしれない。しかし、製品が段積みされた状態で集合包装されている場合の衝撃強さ、弾性支持されているユニットに弾性支持されいる部品への衝撃の伝達率、段ボール包装貨物の積み重ね落下などに関する衝撃伝達の特性などを定性的に検討するためには、本モデルの数値解析により得られた知見は十分に有意義であると考えられる。

また、振動や衝撃を緩和する目的で、衝撃の伝達経路に粘性材料や粘性部品が介在する場合の衝撃伝達の特性についても粘性減衰をもつばね質量モデルを用いて検討した。

2. 製品及び衝撃のモデル化

Fig. 1 に示す 2 種類の衝撃モデル（Model-A、Model-B）について理論解析を行い、1 自由度ばね質量系（Model-O）との違いについて検討した。これらはすべて線形モデルであり、運動方程式をたてラプラス変換[3] などによる解析よって衝撃応答を導出することができる。その最大値を無次元化してプロットすることによって衝撃スペクトルが作成でき、製品モデルに破壊条件を設定することによって損傷境界線図が作成できる。

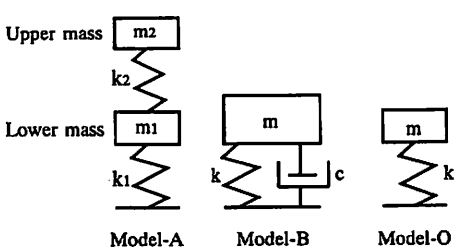

Fig.1 Mathmatical Model for Products

Fig. 2 に製品モデルに入力する衝撃パルスの形状を示す。

(a) Half-sine shock pulse (b) Rectangular shock pulse
Fig.2 Two kinds of shock pulse

Fig. 2 (a)は正弦半波衝撃パルスでこれまでの衝撃試験でよく用いられてきたものでゴムパッドに衝撃テーブルを衝突させることによって発生される波形である。発泡プラスチック製緩衝材により包装された貨物が落下衝撃を受けたときこれに似た衝撃パルスが発生する。Fig. 2 (b)は方形波衝撃パルスである。1 自由度ばね質量系にこの衝撃パルスを入力すると $T_0 \times f_c \geqq 0.5$ の範囲で伝達率は 2 となる[1]。一方、入力パルスが正弦半波やのこぎり波では伝達率は一定とならず[1]、入力する衝撃パルスの作用時間によって衝撃の伝達が異なり製品強度を正確に把握することができない。このため JIS Z 0119 及び ASTM D 3332 では許容加速度を求めるのに台形波が用いられるように規定されている。この台形波は現実の衝撃試験で発生できる方形波に最も類似した波形であり、伝達率もほぼ一定に保たれている[1]。

3. 理論式の導出

3.1 運動方程式

3.1.1 Model-A

運動方程式は次のようになる。

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_1\ddot{x}_1+k_2(x_1-x_2)+k_1(x_1-x_0)=0$$

ラプラス変換[3]して整理すると、

$$\tilde{x}_2=\omega_{11}^2\omega_{22}^2\tilde{x}_0/\{s^4+(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{22}^2)s^2+\omega_{11}^2\omega_{22}^2\} \quad ①$$

$$\tilde{x}_1=\omega_{11}^2(s^2+\omega_{22}^2)\tilde{x}_0/\{s^4+(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{22}^2)s^2+\omega_{11}^2\omega_{22}^2\} \quad ②$$

ここで、$\omega_{11}^2=k_1/m_1$、$\omega_{12}^2=k_2/m_1$、$\omega_{22}^2=k_2/m_2$ である。

3.1.2 Model-B

運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{x}_1+c(\ddot{x}_1-\ddot{x}_0)+k(x_1-x_0)=0$$

ラプラス変換して整理すると、

$$\tilde{x}=\frac{2\zeta\omega s+\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\tilde{x}_0 \quad ③$$

ここで、$\omega^2=k/m$、$\zeta=c/2\sqrt{mc}$ である。

3.2 衝撃応答

3.2.1 方形波衝撃パルス

製品モデルに入力される衝撃パルスが方形半波の場合、$\ddot{x}_0$ は $A_0(U(t)-U(t-T_0))$ となる。

ここで、$U(t)$ はステップ関数である。

ラプラス変換して、衝撃テーブルの初期変位及び初期速度を0とすると、

$\tilde{x}_0=A_0(1-\exp(-T_0s))/s^3$ ④ となる。

3.2.2 正弦半波衝撃パルス

製品モデルに入力される衝撃パルスが正弦半波の場合、$\ddot{x}_0$ は

$A_0(\sin(\pi t/T_0)U(t)+\sin(\pi(t-T_0)/T_0)U(t-T_0))$ となる。

ここで、$U(t)$ はステップ関数である。

ラプラス変換して、衝撃テーブルの初期変位及び初期速度を0とすると、

$$\tilde{x}_0=\frac{A_0a}{s^2(s^2+a)}(1+e^{-T_0S}) \quad ⑤$$ となる。

ここで、$a=\pi/T_0$ である。

3.3 衝撃荷重、加速度の導出

④式及び⑤式を①式及び②式、③式に代入し、高位の極を有する場合の逆ラプラス変換及び第2遷移定理によって $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x(t)$ が求まる。これより各ばね k_1, k_2, k に働く荷重 f_1, f_2, f が計算できる。また、$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x(t)$ を2階微分することにより各質量 m_1, m_2, m に発生する加速度がわかる(詳細は6. 補足を参照)。

4. 数値計算

Model-A 及び Model-B を構成するばね及び質量は飲料用のスチール缶 (340 g 入り) を参考にして次のように設定した。ここで、ばね定数はスチール缶の扁平圧縮試験により得られた荷重－変位曲線から求めた。各値は次の通りである。

$m=m_1=m_2=390$ g, $k=k_1=k_2=423$ N/mm

製品の破壊には次の二つの形態が考えられる。

① 製品の外殻や外枠などが衝撃荷重によって破損する場合

② 衝撃加速度の伝搬で最弱部品が大きな加速度を受けることによって破損する場合

これら衝撃荷重と加速度との伝達特性は、Model-A では異なるが、Model-B では等価(加速度に質量をかけた値が衝撃荷重に等し

い）である。そのため、Model-A についてはそれぞれの伝達特性を調べ、Model-B については衝撃荷重についてのみ調べた。具体的内容は以下の通りである。

- 衝撃応答波（衝撃荷重、加速度）
- 衝撃スペクトル
- 製品の損傷境界線図

衝撃荷重で破損する場合の許容衝撃荷重はスチール缶の圧縮試験結果から 520 N とし損傷境界線図を作成した。また、加速度で破損する場合の許容加速度は 980 m/s^2 とし損傷境界線図を作成した。

衝撃スペクトルの縦軸は衝撃荷重伝達率及び加速度伝達率とし次のように定義した。

$$\text{衝撃荷重伝達率} = \frac{\text{発生した最大衝撃荷重}}{\text{最大入力加速度} \times \text{総質量}}$$

$$\text{加速度伝達率} = \frac{\text{発生した最大加速度}}{\text{最大入力加速度}}$$

また、衝撃スペクトルの横軸は固有振動数 f_c $(=\sqrt{k/m})$ と衝撃作用時間 T_0 の積とした。ここで、$m = m_1 = m_2, k = k_1 = k_2$ である。

本数値計算の結果、得られた伝達率の最大値を Talbe 1 及び Table 2 にまとめた。また、主な衝撃応答、衝撃スペクトル、損傷境界線図を Fig. 3 から Fig. 15 に示した。

4.1 製品外殻の破損（Model-A）

衝撃により発生した最大衝撃荷重について調べた結果を示しその特徴を述べる。

4.1.1 方形波衝撃パルス

Model-O は衝撃により規則正しく応答し、衝撃作用中及び衝撃作用後の各ピーク荷重がそれぞれ一定の値となっている。一方、Model-A は 2 つ質量部が互いに影響しあい衝撃応答が複雑になるため、衝撃作用中のピーク荷重が多少変動する。その様子を Fig. 3（衝撃応答波）に示す。

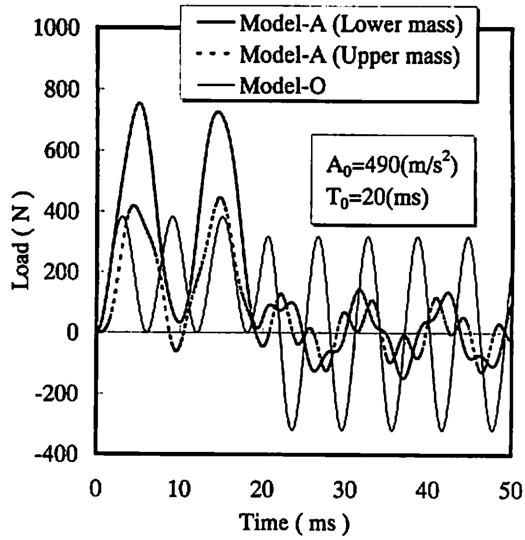

Fig.3 Shock response of Model-A by rectangular shock pulse

Fig.4（衝撃スペクトル）に示すように衝撃荷重伝達率の最大値は Model-O、Model-A（下段質量部）ともに 2 であり、$T_0 \times f_c$ が十分に大きければ衝撃荷重伝達率はほぼ一定となることがわかる。また、$T_0 \times f_c$ に関わらず下段質量部に最大の衝撃荷重が発生し、上段質量部への衝撃荷重伝達率は最大で 1.34 (Table 1 参照) となる。このことから、衝撃荷重による破損は Model-A の場合、常に下段質量部に発生することがわかる。

Fig. 5（損傷境界線図）より Model-A では、許容加速度が 1/2 に低下することがわかる。これは総質量が 2 倍になったことが影響したものと考えられる。また、上段質量部でも許容加速度は Model-O よりは低いことがわかる。許容速度変化についても Model-A（下段質量部）は Model-O よりも小さく、$1/\sqrt{2}$

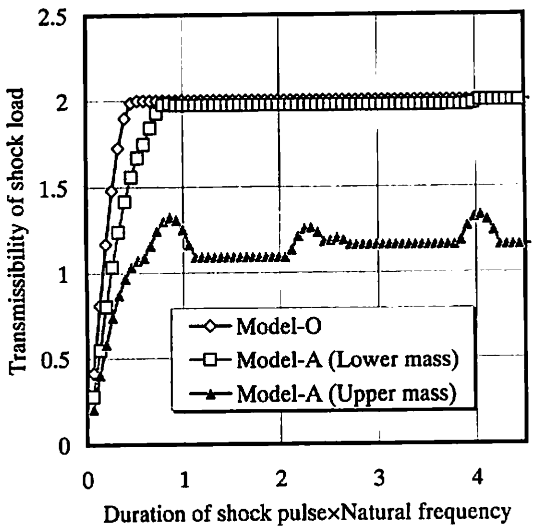

Fig.4 Shock spectrum of Model-A by rectangular shock pulse

Table 1 Maximum taransmissibility on Model-A and Model-O

Shock pulse	Model-O	Model-A (Upper / Lower)	
		Shock load	Acceleration
Square	2.00	1.34 / 2.00	2.68 / 1.99
Half Sine	1.76	1.05 / 1.72	2.09 / 1.56

程度という結果となった。この結果は2つの質量部を連結しているばねを取り除いた場合の固有振動数と1自由度ばね質量系の固有振動数の比に一致している。また、Model-Oと同様にModel-A（下段質量部）も許容加速度が速度変化にあまり影響されず、JIS Z 0119やASTM D 3332で問題なく衝撃強さを評価できることがわかる。ただし、上段質量部の許容加速度は速度変化に影響され微妙に変化する。

4.1.2 正弦半波衝撃パルス

Fig. 6（衝撃スペクトル）よりModel-Aでは、Model-Oと同様、製品の固有振動数と衝撃パルスの作用時間が衝撃応答に大きく影響するため伝達率は一定値とならないことがわかる。

Fig. 7（損傷境界線図）よりModel-Aでは、Model-Oと同様、許容加速度は速度変化に大きく影響され衝撃強さの評価には正弦半波

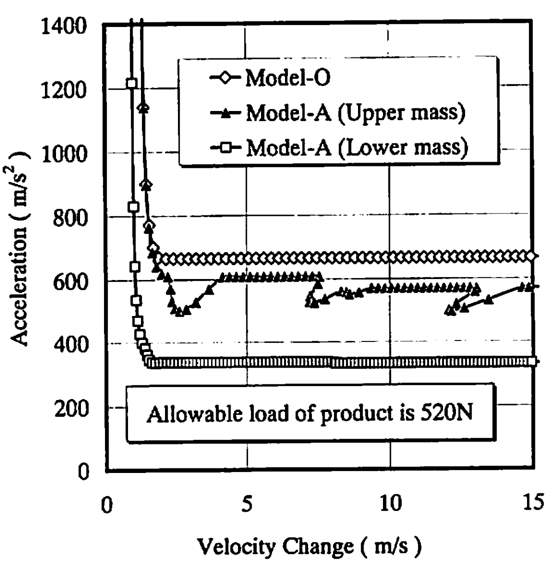

Fig.5 Damage boundary curve of Model-A by rectangular shock pulse

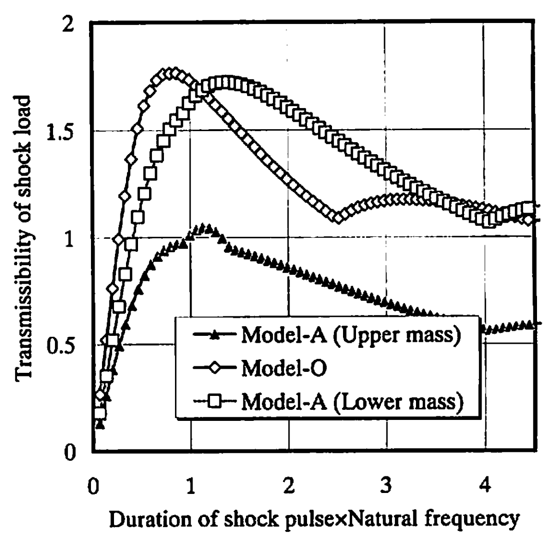

Fig.6 Shock spectrum of Model-A by half-sine shock pulse

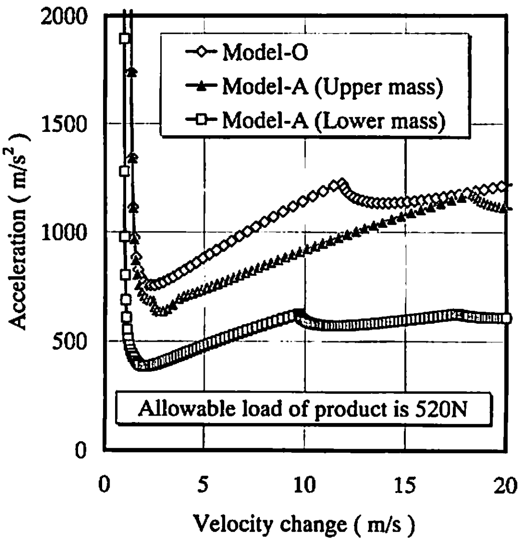

Fig.7 Damage boundary curve of Model-A by half-sine shock pulse

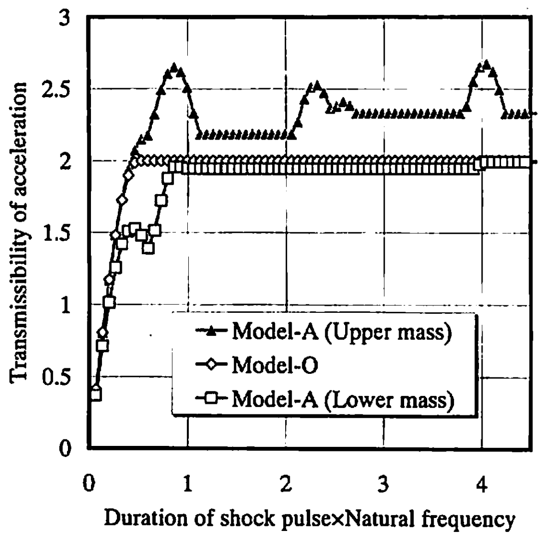

Fig.8 Shock spectrum of Model-A by rectangular shock pulse

は不適切であることがわかる。

4.2 伝搬した加速度による破損 (Model-A)

衝撃により発生した最大加速度について調べた結果を示しその特徴を述べる。

4.2.1 方形波衝撃パルス

Fig. 8 (衝撃スペクトル) に示すように加速度伝達率の最大値は Model-O 及び Model-A (下段質量部) がともに 2 であるのに対して、Model - A (上段質量部) は 2.67 と Model-O を越える値となる (Table 1参照)。換言すると、線形ばねで連結されることによって伝達率が 2 以上 (最大 2.67) になる可能性があり、このことは実際の衝撃試験で 2 以上の伝達率が測定される理論的な根拠となり得る。

Fig. 9 (損傷境界線図) より、速度変化に関わらず常に、上段質量部の許容加速度は Model-O より低く、下段質量部の許容加速度は Model-O と同程度かそれ以上の値となることがわかる。上段質量部では最大 25% (Model-O との比較) 低い値となる。また、上段質量部の衝撃強さを評価する際、速度変化によって許容加速度が多少変化するため注

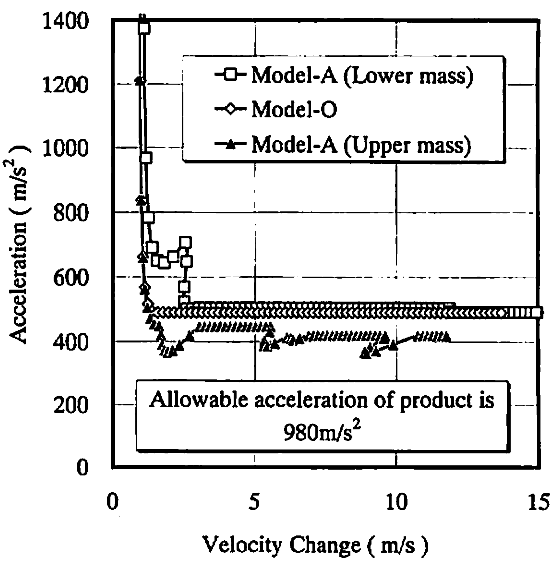

Fig.9 Damage boundary curve of Model-A by rectangular shock pulse

意が必要である。Model-A と Model-O の許容速度変化は互いに同程度の値となった。

4.2.2 正弦半波衝撃パルス

最大の加速度伝達率は Table 1 で示すように上段質量部では 2.09 で、下段質量部では 1.56 となる。また、Fig. 10（衝撃スペクトル）より Model-O に比べ上段には常に加速度が大きく伝達されることがわかる。また、前節と同様に製品の固有振動数と衝撃パルスの作用時間が衝撃応答に大きく影響するため加速度伝達率は一定値とならないことがわかる。

Fig. 11（損傷境界線図）より Model-A では、Model-O と同様に許容加速度は速度変化に大きく影響され衝撃強さの評価には正弦半波は不適切であることがわかる。

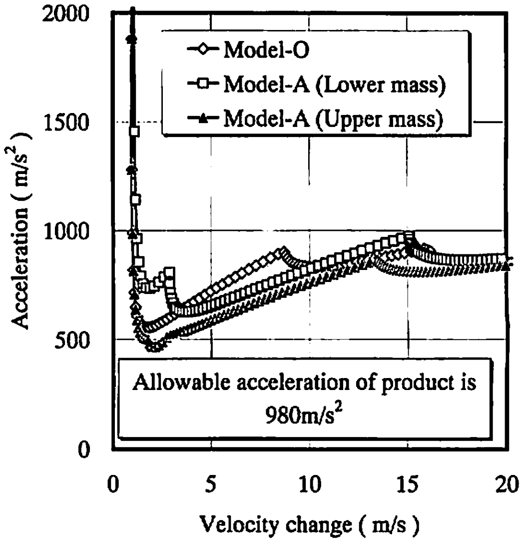

Fig.11 Damage boundary curve of Model-A by half-sine shock pulse

4.3 粘性による影響（Model-B）

粘性材料を介して衝撃が伝搬する場合、衝撃の伝搬に粘性がどのように影響するかについて調べた結果を示しその特徴を述べる。ここで、粘性を表すパラメータとして、減衰比 ζ を用いた。これは粘性減衰係数 C を臨界減衰係数で除した値である。これらの結果は、製品内の易損部品をダンパーで支持する場合の設計などにも役立つものと考えられる。

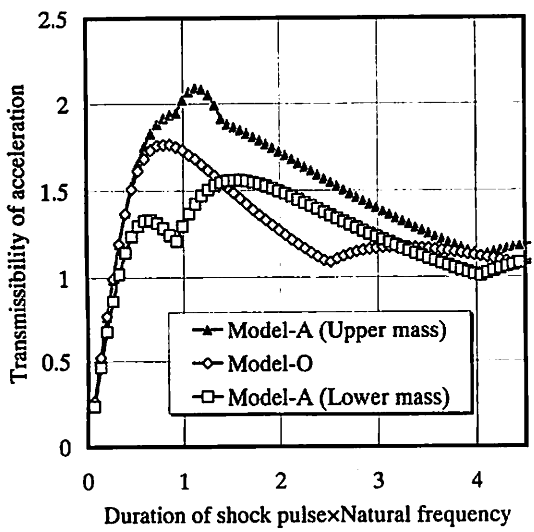

Fig.10 Shock spectrum of Model-A by half-sine shock pulse

4.3.1 Model-B（方形波）

応答波形は ζ が 0 から 1 に近づくにつれて入力衝撃波形に近づく傾向が Fig. 12 より確認できる。このため、伝達率は ζ が 0 から 1 に近づくにつれて 1 に近づくことが予測できる（この傾向は数値計算により確認済みである）。Fig. 13（損傷境界曲線）より Model-A では、許容加速度も Model-O と同様、

Table 2 Maximum taransmissibility on Model-B

Shock pulse	ζ = 0 (Model-O)	ζ = 0.2	ζ = 0.4	ζ = 0.6	ζ = 0.8
Square	2.00	1.57	1.36	1.25	1.18
Half Sine	1.76	1.42	1.26	1.17	1.13

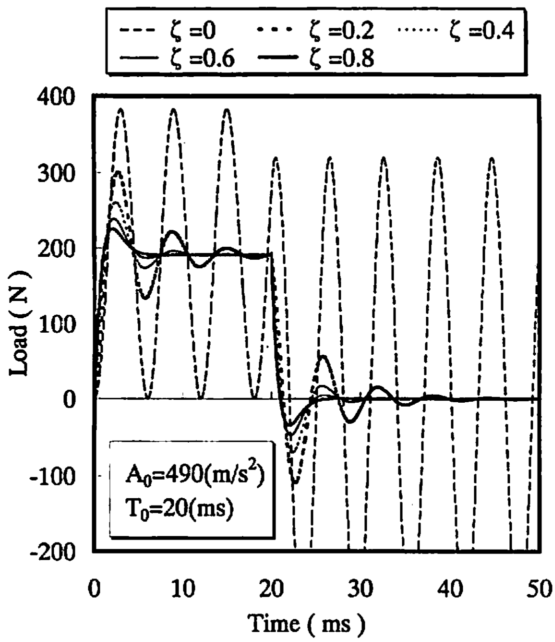

Fig.12 Shock response of Model-B by rectangular shock pulse

速度変化に対して一定の値となり、ζが0から1に近づくにつれて許容加速度が大きくなることがわかる。

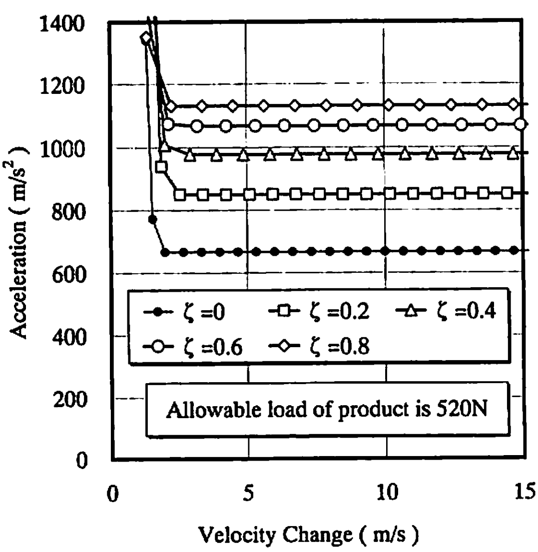

Fig.13 Damage boundary curve of Model-B by rectangular shock pulse

4.3.2 Model-B（正弦半波）

方形波に対する応答と同様に、応答波形はζが0から1に近づくにつれて入力衝撃波形に近づく傾向がFIg. 14より確認できる。このため、伝達率はζが0から1に近づくにつれて1に近づくことが予測できる（この傾向は数値計算により確認済みである）。Fig. 15（損傷境界曲線）より、許容加速度は、ζが0から1に近づくにつれて、速度変化にあまり影響されなくなり、一定の値に近づくことがわかる。

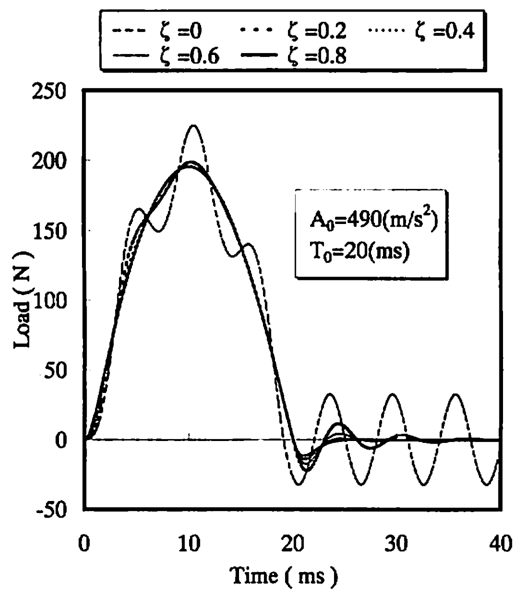

Fig.14 Shock response of Model-B by half-sine shock pulse

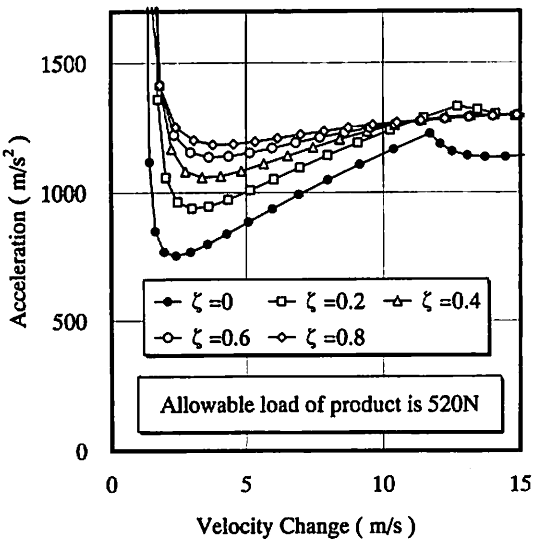

Fig.15 Damage boundary curve of Model-B by half-sine shock pulse

5. 結　論

Model-A 及び Model-B についての衝撃応答を調べることによって得られた主な結論は以下の通りである。

(1) Model-A に方形波衝撃パルスを加えた場合

(a) 各質量部が衝撃荷重によって破損する場合、下段質量部が上段質量部よりも破損し易く、下段質量部の損傷境界曲線は 1 自由度ばね質量系（Model-O）と同様の形状となる。

(b) 各質量部が加速度によって破損する場合、上段質量部が下段質量部よりも破損し易く、最大伝達率は 2.69 となる。上段質量部の許容加速度は 1 自由度ばね質量系（Model-O）と異なり、速度変化に対して多少変化する。

(2) Model-A に正弦半波衝撃パルスを加えた場合、許容加速度は、速度変化によって大きく変化するため、衝撃強さの評価には適していない。また、衝撃荷重が破損の原因となる場合、下段質量部の方が破損しやすく、加速度が破損の原因となる場合、上段質量部の方が破損しやすい。

(3) Model-B の減衰比 ζ が 0 から 1 に近づくにつれて応答波は入力波形に近づく。そのため、ζ が 0 から 1 に近づくにつれて、伝達率は 1 に近づき、許容加速度は大きくなる。また、入力衝撃パルスが正弦半波の場合、速度変化に対して大きく変動していた許容加速度は減衰比 ζ が 0 から 1 に近づくにつれて一定の値に近づく。

6. 補　足

6.1 Model-A（方形波）

④式を①式及び②式に代入すると

$$\tilde{x}_1 = \frac{\omega_{11}^2 (s^2+\omega_{22}^2)}{s^4+(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{22}^2)s^2+\omega_{11}^2\omega_{22}^2} \times \frac{A_0(1-e^{-T_0 s})}{s^3}$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{\omega_{11}^2 \omega_{22}^2}{s^4+(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{22}^2)s^2+\omega_{11}^2\omega_{22}^2} \times \frac{A_0(1-e^{-T_0 s})}{s^3}$$

これらを第 2 遷移定理を用いて高位の極を有する場合の逆ラプラス変換[3]を行うと次のようになる。

$$x_1(t) = A_0\omega_{11}^2\{g_1(t)U(t)-g_1(t-T_0)U(t-T_0)\}$$

$$g_1(t) = \frac{\omega_{22}^2-\alpha^2}{\alpha^4(\beta^2-\alpha^2)}\cos\alpha t + \frac{\omega_{22}^2-\beta^2}{\beta^4(\alpha^2-\beta^2)}\cos\beta t + \frac{\omega_{22}^2}{2\alpha^2\beta^2}t^2$$

$$+\frac{\alpha^2\beta^2-\omega_{22}{}^2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^4\beta^4}$$

$$x_2(t)=A_0\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2\{g_2(t)U(t)-g_2(t-T_0)U(t-T_0)\}$$

$$g_2(t)=\frac{\cos\alpha t}{\alpha^4(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{\cos\beta t}{\beta^4(\alpha^2-\beta^2)}+\frac{t^2}{2\alpha^2\beta^2}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^4\beta^4}$$

ここで、

$$\alpha,\beta=\sqrt{\frac{\left[(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2)\pm\sqrt{(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2)^2-4\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2}\right]}{2}}$$

とした。

荷重 f_1 及び f_2 は次式で求まる。

$$f_1=k_1(x_0(t)-x_1(t))$$

$$f_2=k_2(x_1(t)-x_2(t))$$

また、各質量部に発生する加速度 $\ddot{x}_1(t)$、$\ddot{x}_2(t)$ は $x_1(t)$ 及び $x_2(t)$ の 2 階微分によって求めることができる。

6.2 Model-A (正弦半波)

⑤式を①式及び②式に代入すると

$$\tilde{x}_1=\frac{\omega_{11}{}^2(s^2+\omega_{22}{}^2)}{s^4+(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2)s^2+\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2}\times\frac{A_0a(1+e^{-T_0S})}{s^2(s^2+a^2)}$$

$$\tilde{x}_2=\frac{\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2}{s^4+(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2)s^2+\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2}\times\frac{A_0a(1+e^{-T_0S})}{s^2(s^2+a^2)}$$

となる。

これらを第 2 遷移定理を用いて高位の極を有する場合の逆ラプラス変換[3)] を行うと次のようになる。

$$x_1(t)=A_0\omega_{11}{}^2\{g_1(t)U(t)+g_1(t-T_0)U(t-T_0)\}$$

$$g_1(t)=\frac{(\omega_{22}{}^2-\alpha^2)\sin\alpha t}{\alpha^3(\alpha^2-\beta^2)(a^2-\alpha^2)}+\frac{(\omega_{22}{}^2-\beta^2)\sin\beta t}{\beta^3(\beta^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2)}+\frac{(\omega_{22}{}^2-a^2)\sin at}{a^3(a^2-\alpha^2)(\beta^2-a^2)}+\frac{\omega_{22}{}^2t}{\alpha^2\beta^2a^2}$$

$$x_2(t)=A_0\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2\{g_2(t)U(t)-g_2(t-T_0)U(t-T_0)\}$$

$$g_2(t)=\frac{\sin\alpha t}{\alpha^3(\alpha^2-\beta^2)(a^2-\alpha^2)}+\frac{\sin\beta t}{\beta^3(\beta^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2)}+\frac{\sin at}{a^3(a^2-\alpha^2)(\beta^2-a^2)}+\frac{t}{\alpha^2\beta^2a^2}$$

ここで、$a=\pi/T_0$

$$\alpha,\beta=\sqrt{\frac{\left[(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2)\pm\sqrt{(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2)^2-4\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2}\right]}{2}}$$

とした。

荷重 f_1 及び f_2 は次式で求まる。

$$f_1=k_1(x_0(t)-x_1(t))$$

$$f_2=k_2(x_1(t)-x_2(t))$$

また、各質量部に発生する加速度 $\ddot{x}_1(t)$、$\ddot{x}_2(t)$ は $x_1(t)$ 及び $x_2(t)$ の 2 階微分によって求めることができる。

6.3 Model-B (方形波)

④式を③式に代入すると

$$\tilde{x}=\frac{2\zeta\omega s+\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s^2+\omega^2}\cdot\frac{A_0(1-e^{-T_0S})}{s^3}$$

となる。

これらを第2遷移定理を用いて高位の極を有する場合の逆ラプラス変換[3]を行うと次のようになる。

$$x(t) = A_0\{g(t)U(t) - g(t-T_0)U(t-T_0)\}$$

$$g(t) = \frac{2\zeta\omega\alpha+\omega^2}{\alpha^3(\alpha^2-\beta^2)}e^{\alpha t} + \frac{2\zeta\omega\beta+\omega^2}{\beta^3(\beta^2-\alpha^2)}e^{\beta t} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{\omega^2}$$

ここで、

$$\alpha,\beta = -\zeta\omega \pm i\omega\sqrt{1-\zeta^2}$$

とした。

荷重 f は次式で求まる。

$f = m\ddot{x}(t)$

ここで、$\ddot{x}(t)$ は質量部に発生する加速度で、$x(t)$ の2階微分によって求めることができる。

6.4 Model-B（正弦半波）

⑤式を③式に代入すると

$$\tilde{x} = \frac{2\zeta\omega s+\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s^2+\omega^2}\cdot\frac{A_0 a(1+e^{-T_0 S})}{s^2+a^2}$$

となる。

これらを第2遷移定理を用いて高位の極を有する場合の逆ラプラス変換[3]を行うと次のようになる。

$$x(t) = A_0\{g(t)U(t) - g(t-T_0)U(t-T_0)\}$$

$$g(t) = \frac{2\zeta\omega\alpha+\omega^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)(\alpha^2+a^2)}e^{\alpha t} + \frac{2\zeta\omega\beta+\omega^2}{\beta^2(\beta-\alpha)(\beta^2+a^2)}e^{\beta t} + \frac{2i\zeta\omega a+\omega^2}{-2ia^3(ia-\alpha)(ia-\beta)}e^{iat} + \frac{-2i\zeta\omega a+\omega^2}{2ia^3(ia+\alpha)(ia+\beta)}e^{-iat} + \frac{t}{a^2}$$

ここで、

$$\alpha,\beta = -\zeta\omega \pm i\omega\sqrt{1-\zeta^2}$$

とした。

荷重 f は次式で求まる。

$f = m\ddot{x}(t)$

ここで、$\ddot{x}(t)$ は質量部に発生する加速度で、$x(t)$ の2階微分によって求めることができる。

＜引用文献＞

1）Newton, R. E. 'Fragility assessment, theory and test procedure'. MTS Systems Corp.Report 160. 06, 1976

2）Gary J. Burgess, Packaging Technology and science, 1(1), 5-10 (1988)

3）多谷虎男、"振動・衝撃の基礎理論とラプラス変換"、学会出版センター、p. 423 (1984)

（原稿受付　1999年1月29日）
（審査受理　1999年4月5日）