

段ボールの厚さ方向引張り弾性変形表示

松島成夫*・矢野 忠*・松島 理*

Elastic Deformation for Uniaxial Tensile Stress along Thickness Direction of Corrugated Fiberboard Structure

Shigeo MATSUSHIMA*, Tadashi YANO* and Satoru MATSUSHIMA*

Elastic deformation for tensile stress applied uniformly along thickness direction of corrugated fiberboard (CF) was formulated dependent on shapes and elastic properties of elements. From the formulation stress, deformation and elastic modulus of CF were estimated, and its characteristics were elucidated. Maximum bending stress of semichemical corrugating medium (CM) is estimated on the inner surface at the joint of liner (KL) and CM. Load W_{sx} along machine direction x induced under applied loading is approximately constant with increases of KL thickness T_{kl} and longitudinal elastic moduli (E_{klx} and E_{sb} for KL and CM). It increases with the increase of the CM wavelength L in range $\rho > T_s$ (ρ : radius of CM curvature and T_s : CM thickness) and decreases with increases of T_s and waveheight H . Longitudinal elastic modulus E_z of CF along z direction increases with T_s , H , E_{klx} and E_{sb} increases, and decreases with L increase. And E_z decreases initially and then becomes constant with T_{kl} increase. Poisson's ratio ν_{xz} of CF decreases with increases of L and E_{klx} , and increases as T_s , H and E_{sb} increases. ν_{xz} decreases initially and then increase as T_{kl} .

Keywords : Computational Mechanics, Structural Analysis, Elastic Bending, Strength of Corrugated Fiberboard, Elastic Stress Analysis, Structure Strength, Numerical Analysis

段ボール原紙の形状、弾性特性を考慮し、厚さ方向に一様応力が働く場合の両面段ボールの厚さ方向弾性引張り変形表示を導出した。この表示より、段ボールの応力、変形値および縦弾性係数を求め、その特性を明らかにした。上下表面の中芯の曲げの絶対値の最大値はライナー (KL)・中芯接合部の内表面にある。作用荷重によって生じる中芯の x 方向荷重 W_{sx} は、KL の厚さ T_{kl} 、KL および中芯の縦弾性係数 E_{klx} 、 E_{sb} の変化によらずほぼ一定な値を示すが、 $\rho > T_s$ の域 (ρ : 中芯の曲率半径、 T_s : 中芯の厚さ) では、中芯の波長 L の増加によって大きく増加し、 T_s 、波高 H の増加によって大きく減少する。段ボールの厚さ方向の縦弾性係数 E_z は、中芯の厚さ T_s 、 H 、 E_{klx} 、 E_{sb} の増加によって増加し、 L によって減少する。 T_{kl} の増加によって、 E_z はまず減少し、その後一定な値を示す。段ボールのポアソン比 ν_{xz} は、 T_s 、 H 、 E_{sb} の増加に伴い増加し、 L 、 E_{klx} の増加に伴い減少する。そして、 ν_{xz} は、 T_{kl} の増加に伴いはじめ減少し、その後増加する。

キーワード : 計算力学、構造解析、弾性曲げ、段ボールの強度、弾性応力解析、構造解析、数値解析

*愛媛大学 (〒790-5677 松山市文京区 3 番) :

Ehime University 3 Bunkyou-cho, Matsuyama-shi, Ehime, 790-5677, Japan

1. 緒言

段ボールは強度に優れ、かつ軽量化を可能にする優れた特性をもつ包装用構造材である。このような段ボールの力学的強度特性を明らかにするために、その引張り変形を議論することは重要である。

段ボールの引張りに関する基礎的な研究として、流れ方向（マシン方向）・横方向の引張り変形の実験的研究¹⁾があり、弾性論による解析（片面²⁾、両面段ボール³⁾）がある。特異な引張り変形として接合部の応力集中を議論した引離し変形^{4)~7)}、その逆作用力の場合として面圧縮変形の研究^{8)~11)}がある。

複合材料の見掛けの弾性係数は、各要素の弾性係数の線形結合によって表示され、材料の変形に関係なく一定な係数として表されるものと考えられる。しかし、段ボールのように、内部に空間または空洞をもつ材料（CFSM）の見掛けの弾性係数は、外形が単調な形状でも変形が進行するにつれて変化すると考えられる。CFSMは、包装材としての段ボールばかりでなく、第2次大戦頃の1940年代初めに盛んに航空機体構造への適用、改良として研究されている^{12)~14)}。

段ボールの異方性は、強い異方性を示す段ボール原紙¹⁵⁾ [ライナー（KL）および中芯] および特異な素材構成によって生じ、複雑である。その上に、段ボールの厚さ方向の異方性表示を追求した研究は見当たらない。勿論、厚さ方向変形に関する基本特性を示す段ボールの厚さ方向引張り弾性変形表示および一様化引張り変形表示の議論も見当たらない。

段ボールの実際上の変形は、曲げおよび流れ、横方向の引張り変形ばかりでなく、板面

に垂直な方向の力を受ける変形が多く生じると考えられ、段ボールの曲げおよび流れ、横方向の引張り変形に伴う厚さ方向の変形が常に生じると考えられる。また、段ボールシートの接着力強さおよび平面圧縮強さ試験がある¹⁶⁾。したがって、段ボールの厚さ方向の変形への議論、適用として、その弾性変形を明らかにすることは工学上意義あるものと考えられる。そして、段ボールは特異な構造をし、それによって特異な3次元異方性を示すと考えられ、これに適した弾性変形表示を導出することも工学上意義あるものと考えられる。段ボールのより広い変形状況を明らかにするには、2次元的な変形の議論ばかりではなく、3次元的な変形の議論が必要であると考えられる。

そこで、段ボール一様化変形表示を明らかにするために、我々は、段ボール構造材（すなわち、両面段ボール板）について形状異方性を考慮し、弾性論を用いて、厚さ方向の弾性変形表示の導出を試み、その見掛けの弾性係数の特性を議論した。

2. 解析方法

紙は、直交異方性材として扱われており、応力状態の算定には、直交異方性材の変形方程式がよく用いられているが、応力-ひずみ関係から求めたポアソン比の算定値は、実験値と必ずしもよくは合致せず、若干の相異が生じると言われている¹⁵⁾。しかしながら、直交異方性材の変形方程式は、紙の応力状態には合致する¹⁵⁾とされ、紙の変形の議論においても利用されている^{15) 17)}。

上述したように、段ボール原紙は異方性変

形を示し、さらに段ボールにはKLおよび中芯の特異な配位に基づく異方性変形が加わる。したがって、段ボールは全体として特異な異方性変形を示すものと考えられる。そこで、まず段ボールを見掛け上厚さ一定な一様板として表した3次元弾性変形表示を基に議論する。

広い両面段ボールおよびその中芯の厚さ中央の位置を原点0に、流れ方向(MD)をx軸に、横方向(CD)をy軸に、厚さ方向をz軸に座標をとる(Fig. 1(a,b)参照)。

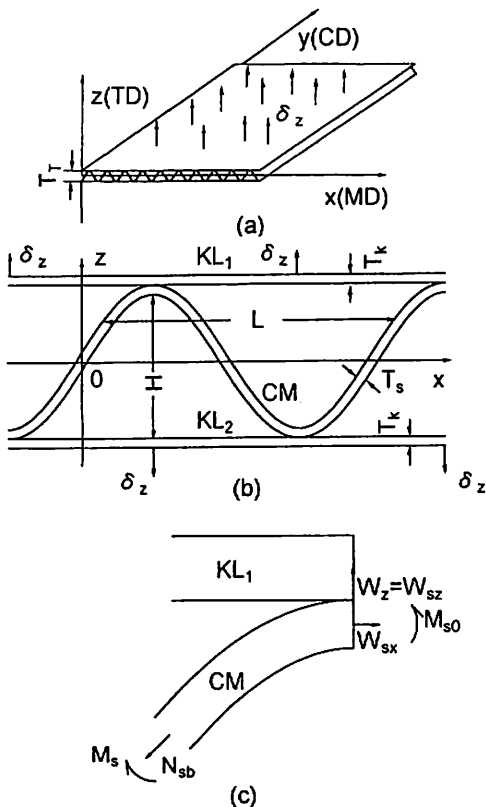


Fig.1 Coordinates and actions for corrugated fiberboard.
 (a) Coordinates and axes.
 (MD, CD and TD are machine, cross and thickness directions.)
 (b) Shape for kraft-liner (KL) and semichemical corrugating medium (CM).
 (c) Actions at KL-CM joint.

x、y、z方向の見掛け上の垂直応力を σ_x 、 σ_y 、 σ_z で、垂直ひずみを ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z で表し、せん断応力を τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} で、せん断ひずみを γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} で表す。 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z は、一般に、応力 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} の線形結合として、

$$\epsilon_x = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + a_{14} \tau_{xy} + a_{15} \tau_{yz} + a_{16} \tau_{zx} \quad (1a)$$

$$\epsilon_y = a_{21} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{23} \sigma_z + a_{24} \tau_{xy} + a_{25} \tau_{yz} + a_{26} \tau_{zx} \quad (1b)$$

$$\epsilon_z = a_{31} \sigma_x + a_{32} \sigma_y + a_{33} \sigma_z + a_{34} \tau_{xy} + a_{35} \tau_{yz} + a_{36} \tau_{zx} \quad (1c)$$

によって表される¹⁸⁾。ここで、 a_{11} 、 a_{12} 、 \dots 、 a_{35} 、 a_{36} は弾性係数である。

z方向にのみ引張り応力 σ_z が働く場合の ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z は、近似的に、

$$\epsilon_x = -\nu_{xz} \sigma_z / E_z \quad (a_{13} = -\nu_{xz} / E_z) \quad (2a)$$

$$\epsilon_y = -\nu_{yz} \sigma_z / E_z \quad (a_{23} = -\nu_{yz} / E_z) \quad (2b)$$

$$\epsilon_z = \sigma_z / E_z \quad (a_{33} = 1 / E_z) \quad (2c)$$

として表される。 E_z はz方向の見掛け上の縦弾性係数、 ν_{xz} 、 ν_{yz} はz方向の引張りひずみのx、y方向の横ひずみへの寄与を示すポアソン比である。

構造上、段ボールの厚さ方向の変形は素材の形状および特性によって大きく変化すると考えられる。そこで、以下のように、弾性および変形のパラメータと形状および弾性係数との関係を順次議論する。

2.1 外力とKL、中芯の諸応力、変形

両面段ボールの上、下表面のKL(KL₁、KL₂)は一定な厚さ T_{k1} 、 T_{k2} をもつ平板であると考え、中芯の形状は、近似的に、厚さ

T_s が一定で、波高 H および波長 L の正弦波形の板であるとする。このとき、 KL_1 および KL_2 の z 軸方向の位置は

$$KL_1 : z = (H+T_s)/2 \sim (H+T_s)/2 + T_{k1}$$

$KL_2 : z = -(H+T_s)/2 - T_{k2} \sim -(H+T_s)/2$ の領域にある。

中芯の厚さ中央の位置を z_0 、 z_0 から中芯の厚さ方向の距離 t の位置を z で示すと、 z_0 および z は各

$$z_0 = \frac{H}{2} \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \quad (3)$$

$$z = z_0 + t \cos \theta \quad (4)$$

で表される位置にある。ただし、 θ は

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{dz_0}{dx} \right) \quad (5)$$

であり、 t は着目した位置 x での中芯厚さ中央からの中芯厚さ方向の距離である。

z 方向一様引張り変形には、 KL の z 方向の一様変位の場合と上、下 KL 面に一様荷重を受ける場合とが考えられる。

上、下面の単位面に一様な分布力 w_z が働く場合、 KL ・中芯接合部の変形は制限されるので、 KL には z 方向たわみの曲げ変形が生じる。一般に用いられている段ボールはその面が広く、 x_z 面上の変形は、前報の曲げ¹⁹⁾ ²⁰⁾ および面圧縮^{9)~11)} の変形と同様に、近似的に、平面ひずみ状態を示すと考えられる。また、平面ひずみ変形は平面応力のものと類似することが示されている²⁰⁾。このことより、曲げ¹⁹⁾ ²⁰⁾ および面圧縮^{9)~11)} と同様に、 KL は単位幅をなす真直はり、中芯は単位幅をなす曲がりはりと同様な変形をするものとする。すると、 KL_1 、 KL_2 の曲げ変形は、近似的に、両端固定のはりの曲げで表され、曲げ応力 σ_{kiz} ²¹⁾ およびたわみ δ_{kiz} ²²⁾ は

$$\sigma_{kiz} = M_{kt_{ki}}/I_{ki} \quad (i=1,2) \quad (6a)$$

$$\delta_{kiz} = \frac{w_z}{24E_{kix} I_{ki}} \left[\left(\frac{3L}{4} - x \right)^4 - 2L \left(\frac{3L}{4} - x \right)^3 + L^2 \left(\frac{3L}{4} - x \right)^2 \right] \quad (6b)$$

$$M_k = \frac{w_z}{12} \left[6 \left(\frac{3L}{4} - x \right)^2 - 6L \left(\frac{3L}{4} - x \right) + L^2 \right] \quad (7a)$$

で表せる。 t_{k1} 、 t_{k2} は KL_1 、 KL_2 の厚さ中央から厚さ方向の着目位置までの距離であり、 I_{k1} 、 I_{k2} は KL_1 、 KL_2 の断面 2 次モーメント

$$I_{k1} = T_{k1}^3/12, \quad I_{k2} = T_{k2}^3/12 \quad (7b)$$

である。 E_{kxi} は KL_1 、 KL_2 の x 方向の縦弾性係数である。また、 w_z は引張り分布荷重である。

一様変位は、近似的に、 KL ・中芯接合部に $2W_z$ が集中して働く場合と考えられ、その W_z は

$$W_z = W_{sz} = w_z L/2 \quad (8)$$

で表される (Fig. 1 (c) 参照)。

段ボールの z 方向引張りの場合、中芯の曲げ応力 σ_{sb} は

$$\sigma_{sb} = \frac{N_{sb}}{T_s} + \frac{1}{T_s \rho} \left[1 + \frac{1}{\kappa} \frac{t}{\rho+t} \right] M_s \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{1}{3} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^6 + \dots \quad (10a)$$

$$\rho = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{d^2 z_0 / dx^2} \quad (10b)$$

で表される²³⁾。 M_s および N_{sb} は段ボールに z 方向一様引張り力が働く際の中芯着目位置

に生じるモーメントおよび軸力

$$N_{sb} = W_{sx} \cos \theta + W_{sz} \sin \theta \quad (11)$$

である。段ボール中芯の位置は $x = 0, z = 0$ に対し反対称的に表せ (Fig. 2 (b) 参照)、モーメント M_s の分布も同様になり、 $M_s (x = 0, z = 0)$ は零になる。このことより、固定モーメント M_{s0} および M_s は

$$M_{s0} = W_{sx} H/2 - W_{sz} L/4 \quad (12a)$$

$$M_s = -W_{sx} z_0 + W_{sz} x \quad (12b)$$

で表せる。 W_{sx} および W_{sz} は、 z 方向引張りの際、KL・中芯接合部に生じる x, z 方向の荷重である (Fig. 1 (c) 参照)。

KL の伸び、または、 z 方向の変位に対して KL 接合部の中芯の変形は曲がりはりと同様な x 、または、 y 方向への引延し変形であり、その接合部の傾きの変化は零であると考えられる。半波長 $L/2$ 間に生じる中芯厚さ中央の x, z 方向の変位 δ_{sx}, δ_{sz} および傾斜角 i_s は各

$$\begin{aligned} \delta_{sx} = & \frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left[N_{sb} + \frac{M_s}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \\ & \times \left(\frac{H}{2} - z_0 \right) d\phi \quad (13a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{sz} = & -\frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left[N_{sb} + \frac{M_s}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \\ & \times \left(\frac{L}{4} - x \right) d\phi \quad (13b) \end{aligned}$$

$$i_s = \frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left[N_{sb} + \frac{M_s}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \right] d\phi \quad (13c)$$

で表せる²⁴⁾。 E_{sb} は中芯の縦方向の縦弾性係数であり、 ϕ および ϕ_0, ϕ_1 は

$$\phi = (\pi/2) - \theta \quad (14a)$$

$$\phi_0 = \phi (x = -L/4), \quad \phi_1 = \phi (x = L/4) \quad (14b)$$

である。

2.2 加工方向の荷重、縦弾性係数

上、下 KL の面に外部から垂直応力 $w_z (= \text{一定})$ が働く場合、近似的に、KL には式(6a)に示したような軸力零の曲げ応力 σ_{kiz} が生じ、KL・中芯接合部の中芯には x, z 方向の荷重 W_{sx}, W_{sz} が、KL には z 方向の荷重 $W_{kz} (= W_{sz} = Lw_z)$ の力が生じるものと考えられる。段ボールの変位に関する幾何学的条件により、KL・中芯接合部の x 方向の傾斜角 i_s の変化が零であり、式(13c)によって、関係

$$A_s W_{sx} + B_s W_{sz} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_s = & \frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left[\sin \theta - \frac{z_0}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \\ & \times d\phi \quad (16a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_s = & \frac{1}{E_{sb} T_s} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left[\cos \theta + \frac{x}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \\ & \times d\phi \quad (16b) \end{aligned}$$

が得られ、したがって、 W_{sx}, W_{sz} は

$$W_{sx} = -(B_s/A_s) W_{sz} \quad (17a)$$

$$W_{sz} = W_{kz} = Lw_z/2 \quad (17b)$$

であることがわかる。

z 方向に一様引張り荷重が働く場合、KL の曲げたわみ δ_{Biz} が生じ、 δ_{Biz} の最大値 δ_{kiz} は

$$\delta_{kiz} = w_z L^4 / (384 E_{kx} I_{ki}) \quad (18)$$

で表される²²⁾。この δ_{kiz} は接合部間距離 L

を周期とした波状変位を示す。 δ_{kiz} は、KL の z 方向変位であり、位置 $x = 0$ 、 $t = T_k/2$ の値である。そして、段ボールの形状および作用状態を考慮すると、 z 方向引張り変形時の ε_z 、 z 方向の変位 (厚さ増加) δ_z は、近似的に、

$$\varepsilon_z = \delta_z / T_T \quad (19a)$$

$$\delta_z = \delta_{sz} + \delta_{B1z} + \delta_{B2z} \quad (19b)$$

で表される。

KL の $x = -L/4 \sim L/4$ 間の曲げたわみによる KL_i ($i = 1, 2$) の x 方向の縮み δ_{kix} は、近似的に、変形時の KL の長さ s_{ki} と原寸 L との差

$$\delta_{kix} = L - s_{ki} \quad (i = 1, 2) \quad (20)$$

$$s_{ki} = \int_{x=-L/4}^{x=L/4} \sqrt{1 + \left(\frac{d\delta_{kiz}}{dx} \right)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_{kiz}}{dx} &= \frac{w_z}{12E_{kiz} I_{ki}} \\ &\times \left[2x^3 - \frac{3L}{2} x^2 - \frac{L^2}{8} x + \frac{3L^3}{32} \right] \end{aligned}$$

で表される。KL₁、KL₂ 側の x 方向伸び δ_{k1x} 、 δ_{k2x} は異なるもの

$$\delta_{k1x} \neq \delta_{k2x}$$

と考えられ、 z 方向引張りによって x 方向に沿っての曲げが生じることになる。このことにより、 x 方向伸びを平均の伸びで表す。すると、 δ_{kix} および δ_{sx} による $L/2$ 間の KL および中芯の x 方向への変位寄与 δ_{kix0} および δ_{sx0} に関する関係、すなわち、外力零の KL、中芯の変形制限および力の釣合い関係

$$(2\delta_{sx} - \delta_{k1x} - \delta_{k2x}) = \delta_{k1x0} + \delta_{k2x0} + \delta_{sx0} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} E_{sx} T_s \delta_{sx0} - E_{k1x} T_{k1} \delta_{k1x0} \\ - E_{k2x} T_{k2} \delta_{k2x0} = 0 \end{aligned} \quad (22b)$$

を考慮すると、 δ_{kix0} の和および δ_{sx0} は

$$\delta_{k1x0} + \delta_{k2x0} = \frac{T_s E_{sx} (2\delta_{sx} - \delta_{k1x} - \delta_{k2x})}{T_{k1} E_{k1x} + T_{k2} E_{k2x} + T_s E_{sx}} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \delta_{sx0} = \\ \frac{(T_{k1} E_{k1x} + T_{k2} E_{k2x}) (2\delta_{sx} - \delta_{k1x} - \delta_{k2x})}{T_{k1} E_{k1x} + T_{k2} E_{k2x} + T_s E_{sx}} \end{aligned} \quad (23b)$$

で表される。したがって、 L 間に生じる x 方向の段ボール変位 δ_x は

$$\delta_x = \delta_{x1} + \delta_{x2} = \delta_{k1x} + \delta_{k2x} + \delta_{k1x0} + \delta_{k2x0} \quad (24)$$

で表されるものとする。

E_x は段ボールの x 方向の見掛けの縦弾性係数であり、

$$E_x = \left[\frac{T_{k1} E_{k1x} + T_{k2} E_{k2x} + T_s E_{sx}}{T_T} \right] \quad (25a)$$

$$E_{sx} = \frac{E_{sb}}{A_x} \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} A_x = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left[\cos \theta - \frac{1}{\rho} \left(x - \frac{B_s}{A_s} z_0 \right) \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \left(\frac{H}{2} - z_0 \right) d\phi \end{aligned} \quad (25c)$$

$$T_T = T_{k1} + T_{k2} + H \quad (25d)$$

で表され³⁾、 x 方向の KL_{*i*} の最大応力 $\sigma_{kx\max}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_{kx\max} = \sigma_{kix} (t_k = T_{ki}/2) + W_{kx} (E_{kx1}/T_{k1} \\ + E_{kx2}/T_{k2}) - (E_{kx1} \delta_{k1x0} + E_{kx2} \delta_{k2x0}) / L \end{aligned} \quad (26)$$

で表される。そして、強い最大曲げ応力を考

慮すると、 KL_i 、中芯の最大応力 $\sigma_{kx\max}$ 、 $\sigma_{sx\max}$ は、近似的に、

$$\sigma_{kx\max} = \sigma_{kix} (t_k = T_{ki}/2) \quad (i = 1, 2) \quad (27a)$$

$$\sigma_{sx\max} = \sigma_{sb} (t_s = -T_s/2) \quad (27b)$$

で表される。

W_{sx} 、 W_{sz} が求められれば、式(13b)より、 δ_{sz} の値を得ることができる。すなわち、式(17a、b)の W_{sz} 、 W_{sx} の値を式(13b)に代入して、 δ_{sz} の値を求めることができる。したがって、式(6b)、(19b)より、一様分布荷重 w_z による上、下 KL の間隔の増加 δ_z は、近似的に、

$$\delta_z = \frac{w_z L^4}{32} \left[\frac{1}{E_{k1x} T_{k1}^3} + \frac{1}{E_{k2x} T_{k2}^3} \right] + \delta_{sz} \quad (28)$$

で表される。

また、見掛けの縦弾性係数 E_z および w_z と δ_z との関係は

$$E_z = (w_z T_T) / \delta_z \quad (29)$$

で表される。そして、段ボールの形状を考慮すると、 $\delta_{sz} > \delta_{k1z} + \delta_{k2z}$ であると考えられる。

z 方向の伸びと x 方向の横伸びとの比を示す見掛けのポアソン比 ν_{xz} は、ポアソン比の定義により

$$\nu_{xz} = (T_T \delta_x) / (L \delta_z) \quad (30)$$

で表される。

このように、 ν_{xz} は、 W_{sx} の働きを通しての 2 次的変形寄与である。段ボールの形状と作用力との関係を考慮すると、 W_z による y 方向の変形への寄与は、さらに高次的寄与と

なり、 ν_{yz} は ν_{xz} に比べさらに小さい値となるものと考えられる。したがって、近似的には、 ν_{yz} は

$$\nu_{yz} = 0 \quad (31)$$

とみなせる。

以上より、式(29)によって E_z 値を、式(30)によって ν_{xz} 値を求めることができる。

3. 結果および考察

一般に使われている両面段ボールの形状²⁵⁾に合わせ、議論する段ボールの KL および中芯の厚さを $T_{k1} = T_{k2} = 0.30$ mm および $T_s = 0.24$ mm とし、中芯の波長および波高を $L = 9.2$ mm および $H = 4.6$ mm とする。また、段ボールの引張り分布荷重 w_z は 1.0×10^{-3} N/mm² とする。まず、素材の KL および中芯の基本的変形を、次に、弾性係数および変形のパラメータを議論する。

KL の流れ方向および横方向の縦弾性係数は 6.44×10^4 N/mm² および 2.44×10^4 N/mm² ²⁶⁾ であり、中芯では 2.55×10^4 N/mm² および 1.12×10^4 N/mm² であることが示されている²⁵⁾。そこで、便宜上、基本的に KL の縦弾性係数を $E_{kx1} = E_{kx2} = 2.64 \times 10^4$ N/mm² ($= 6.44/2.44$) で、中芯の係数を $E_{sb} = 1.00 \times 10^4$ N/mm² で表す。

すると、式(17a、b)、(24)、(25a)、(28)より、 E_x 、 W_{sx} 、 W_{sz} 、 δ_x 、 δ_z は

$$E_x = 2.02 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$W_{sx} = 8.43, \quad W_{sz} = 4.60 (\times 10^{-3} \text{ N/mm})$$

$$\delta_x = 0.493, \quad \delta_z = 1.76 (\times 10^{-2} \text{ mm})$$

となり、これらの値を式(9)、(11)、(12b)に代入すると、 σ_{sb} が求められる。求めた中芯

の上、下表面の応力 σ_{sb} と x との関係を Fig. 2 (a) に示す。Fig. 2 (a) より、上表面 ($t = T_s/2$)、下表面 ($t = -T_s/2$) の σ_{sb} の絶対値は、大きく、各、正值、負値となり、 $t = 0$ では小さい値をとることが、また、 $x = 0$ 付近を除くと、それらの絶対値は単調に増加することがわかる。そして、同じ x の値に対するその絶対値は $t = T_s/2$ のものより $t = -T_s/2$ の方が大きい。 $x = 0$ 、 $x = L/8$ 、 $x = L/4$ での $\sigma_{sb} - t$ の関係を求め、Fig. 2 (b) に示す。Fig. 2 (b) より、 $t = 0$ 付近を除くと、中芯の中央からの距離 t の増加に伴って、単調な増加、または、減少を示すことがわかる。そして、 $x = L/4$ 、 $t = -T_s/2$ で、

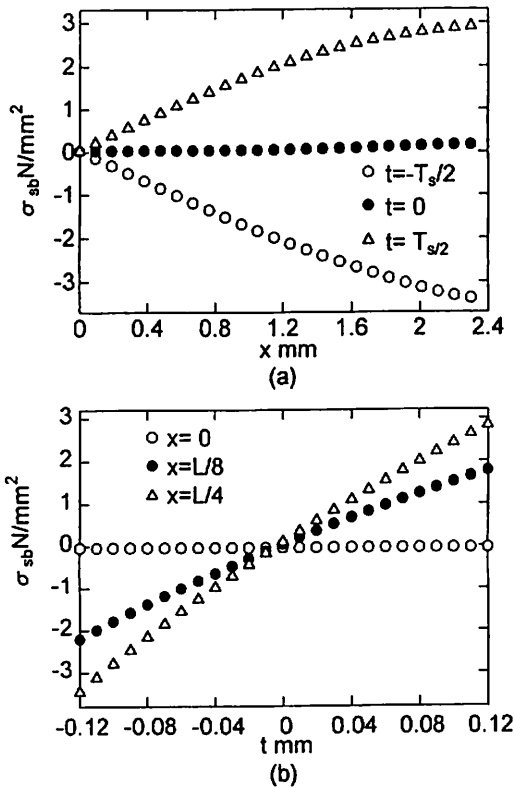


Fig.2 Distribution of Bending stress for CM.
(a) Relationship between σ_{sb} and x .
(b) Relationship between σ_{sb} and t .

σ_{sb} の絶対値が最大値 σ_{smax} となる。すなわち、KL と中芯の接合部で最大値となる。

段ボールの変形の状態量 δ_x 、 δ_z 、 ν_{xz} およびパラメータ W_{sx} 、 σ_{smax} 、 E_x 、 E_z は素材の形状および材料特性によって大きく変わるものと考えられる。そこで、式(9)、(17a)、(25a)、(29) より、 W_{sx} 、 σ_{smax} 、 E_x 、 E_z と素材形状 T_{k1} ($= T_{k2}$)、 T_s 、 L 、 H との関係を求め、Fig. 3 ~ 6 に示す。Fig. 3 より、 W_{sx} および σ_{smax} は T_{k1} の変化によらず一定な値を示すことが、Fig. 4 より、 W_{sx} は T_s の増加によらず一定な値を示し、 $\rho > T_s/2$ (式(9)より)

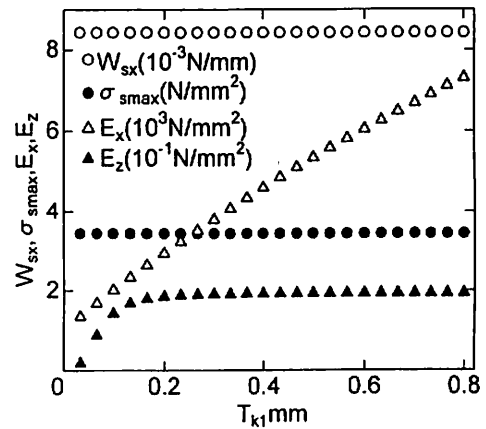


Fig.3 Relationships between W_{sx} , σ_{smax} , E_x , E_z and T_{k1} .

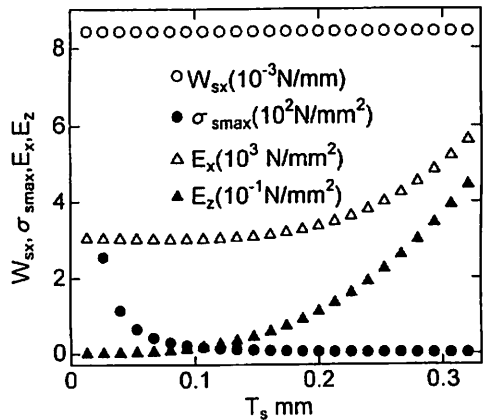


Fig.4 Relationships between W_{sx} , σ_{smax} , E_x , E_z and T_s .

の σ_{smax} は T_s の増加に伴い大きく減少し、零に近づくことがわかる。また、Fig. 5 より、L の増加に伴って、 W_{sx} は増加するが、 σ_{smax} ($\rho > T_s/2$) は、始めは急激に大きく減少し、極小となった後、増加することがわかる。Fig. 6 より、H の増加に伴い、 W_{sx} は大きく減少し、 σ_{smax} は僅か減少した後、増加することがわかり、そして、 $H = 1$ mm 付近で σ_{smax} の極小が生じることがわかる。

Fig. 3 ~ 6 より、 E_x は T_{k1} 、 T_s 、L の増加に伴って増加することがわかり、 E_z は、 T_{k1} の増加に伴ってまず大きく増加した後一定な

値を示すことが、 T_s の増加に伴い増加を示すことがわかる。L の増加に伴い、 E_z は大きな減少を示し、零に近づく。H の増加によって、 E_x は大きく減少した後、一定値に近づくが、一方、 E_z は増加した後、一定値に近づく。

式 (9)、(17a)、(25a)、(29) より、 W_{sx} 、 σ_{smax} 、 E_x 、 E_z と素材形状 E_{k1x} 、 E_{sb} 、との関係を求め、Fig. 7、8 に示す。Fig. 7、8 より、 W_{sx} 、 σ_{smax} は E_{k1x} 、 E_{sb} の増加に対し一定な値を示すことがわかる。一方、 E_{k1x} の増加に伴い、 E_x は直線的に増加し、 E_z はほ

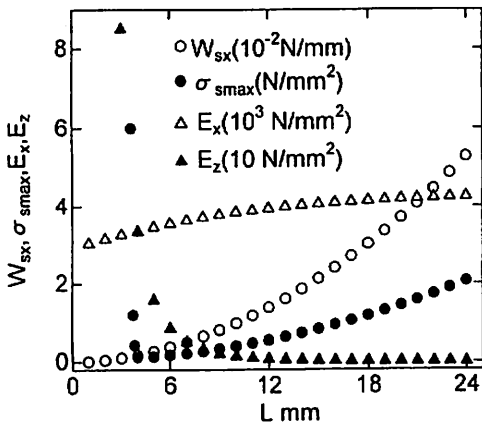


Fig.5 Relationships between W_{sx} , σ_{smax} , E_x , E_z and L.

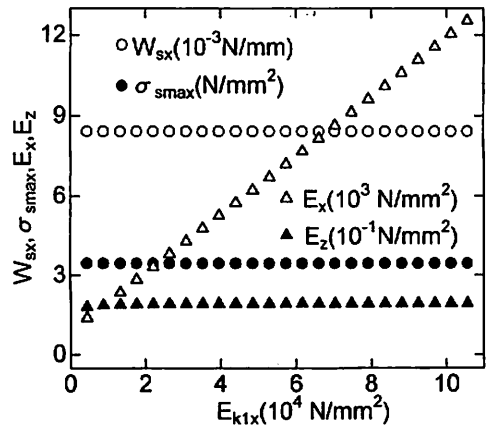


Fig.7 Relationships between W_{sx} , σ_{smax} , E_x , E_z and E_{k1x} .

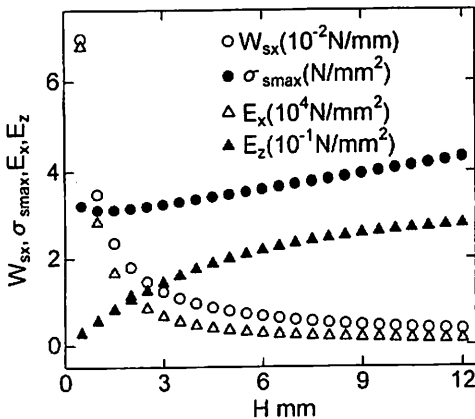


Fig.6 Relationships between W_{sx} , σ_{smax} , E_x , E_z and H.

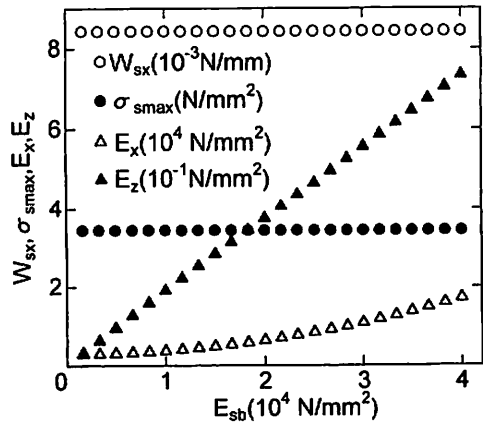


Fig.8 Relationships between W_{sx} , σ_{smax} , E_x , E_z and E_{sb} .

ば一定な値を示す。E_{sb}の増加に伴い、E_xは緩やかに、E_zは直線的に増加する。

式(24)、(28)、(30)より、 δ_x 、 δ_z 、 ν_{xz} と T_{kl} 、 T_s 、 L 、 H との関係を求め、Fig. 9~12に示す。Fig. 9より、 T_{kl} の増加に伴い、 δ_x 、 δ_z は大きく減少することがわかる。Fig. 10より、 T_s の増加に伴い、 δ_x は増加した後、やや減少し、 $T_s = 0.24$ mm付近で最大となり、 δ_z は T_s の増加に伴って大きく減少することがわかる。Fig. 11より、 L の増加に伴って δ_x 、 δ_z は大きく増加するが、 $L = 12$ mmくらいまではあまり大きな値をとらないことが

わかる。Fig. 12より、 H の増加に伴って δ_x は大きく増加し、 δ_z は大きく減少するが、実用段ボールの中芯の $H = 4.6$ mmは δ_x 、 δ_z の値が一定値に近づく過渡域にあることがわかる。Fig. 9より、 ν_{xz} は、 T_{kl} の増加に伴い、増加した後、緩やかに減少し、 $T_{kl} = 0.16$ mm付近で極大となることがわかる。Fig. 10と12から、 T_s 、 H の増加に伴って、 ν_{xz} は大きく増加し、Fig. 11から、 L の増加に伴って、 ν_{xz} は大きくまたは緩やかに減少するが、実用段ボール $L = 9.2$ mmは一定値に近づく付近の値をとることがわかる。KLの最大曲げ

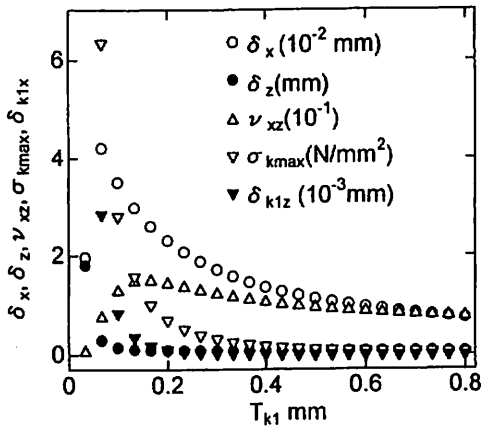


Fig. 9 Relationships between δ_x , δ_z , ν_{xz} , σ_{kmax} , δ_{klz} , and T_{kl} .

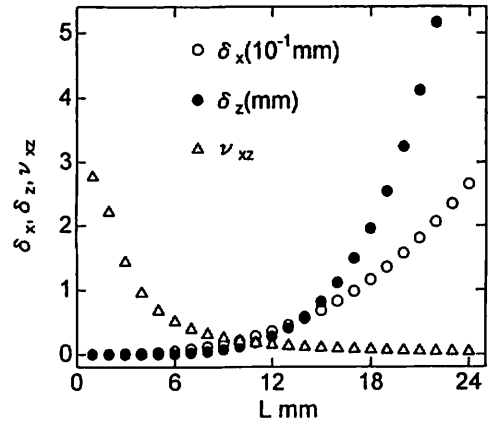


Fig. 11 Relationships between δ_x , δ_z , ν_{xz} , and L .

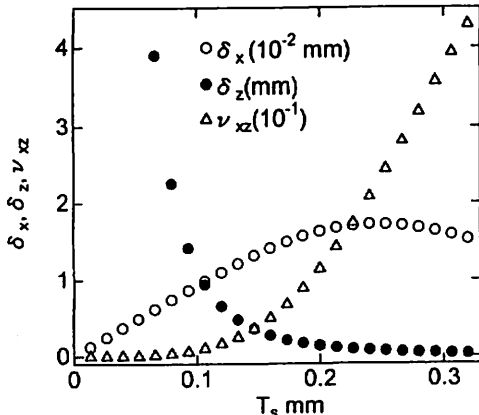


Fig. 10 Relationships between δ_x , δ_z , ν_{xz} , and T_s .

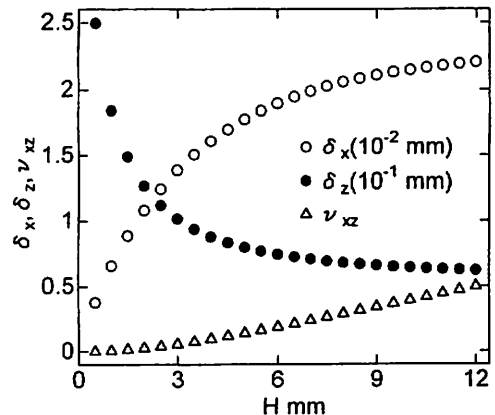


Fig. 12 Relationships between δ_x , δ_z , ν_{xz} , and H .

の応力 σ_{kmax} 、たわみ δ_{klz} と T_{kl} との関係を Fig. 9 に示す。 T_{kl} の増加に伴って、 σ_{kmax} 、 δ_{klz} は、共に、大きく減少することがわかる。

式 (24)、(28)、(30) より、 δ_x 、 δ_z 、 ν_{xz} と E_{klx} 、 E_{sb} との関係を求め、 Fig. 13、 14 に示す。 Fig. 13 と 14 より、 E_{klx} の増加に伴い、 δ_x 、 δ_z は減少することがわかる。また、 E_{sb} の増加に伴って、 δ_x は、大きく増加した後 $E_{sb} = 1.8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ 付近で極大となり、その後減少する。 δ_z は E_{sb} の増加によって大きく減少する。 ν_{xz} は、 E_{klx} の増加によって減少し、 E_{sb} の増加によって増加する。ま

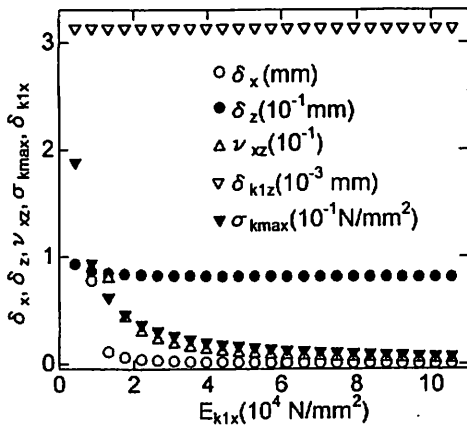


Fig. 13 Relationships between δ_x , δ_z , ν_{xz} , σ_{kmax} , δ_{klz} and E_{klx} .

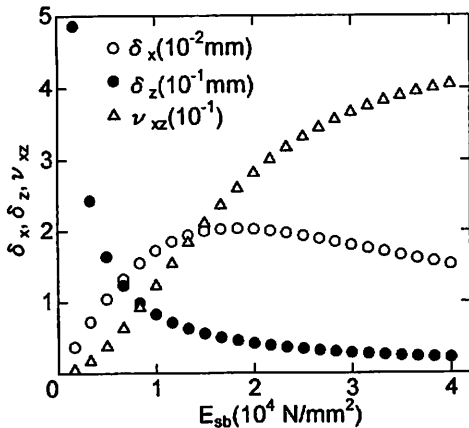


Fig. 14 Relationships between δ_x , δ_z , ν_{xz} and E_{sb} .

た、 σ_{kmax} 、 δ_{klz} と E_{klx} との関係を示す Fig. 13 より、 σ_{kmax} と δ_{klz} は E_{klx} の増加によって大きく減少し、零に近づくことがわかる。

以上より、段ボールの厚さ方向の変形表示は、周知の結果に合致すると考えられ、また、妥当な弾性係数および変形のパラメータを示すものと考えられる。

4. 結 言

段ボール原紙の形状および特性を考慮し、両面段ボールの厚さ方向の弾性引張り変形表示を導出した。その表示より、段ボールの応力、変形値および縦弾性係数を求め、その特性を明らかにした。両面段ボールおよび中芯の厚さ中央の位置に座標の原点をとり、 x 、 y 、 z 方向を段ボールの流れ方向 (マシン方向)、横方向、厚さ方向にした。基本となる段ボールの上、下ライナー [KL_1 、 KL_2 (KL_1 と同材)]、中芯の厚さをそれぞれ T_{kl} (= T_{k2}) = 0.30、 T_s = 0.24 (mm)、中芯の段の波長、高さを L = 9.2、 H = 4.6 (mm) で、 KL 、中芯の流れ方向の縦弾性係数を E_{klx} (= E_{k2x}) = 2.64×10^4 、 E_{sb} = 1.0×10^4 (N/mm^2) とした。得られた主な結果は、以下の通りである。

- (1) 中芯上、下表面の曲げ応力 σ_{sb} の絶対値は、 x の増加によって増加し、上、下表面の σ_{sb} は、各、正、負であるが、絶対値は下表面のものが大きく、接合部 $x = L/4$ 、 $t = -T_s/2$ で、 σ_{sb} の絶対値が最大値 σ_{smax} になる。
- (2) 中芯に働く x 方向の荷重 W_{sx} 、 σ_{smax} は T_{kl} 、 E_{klx} 、 E_{sb} の変化によらずほぼ一定な値を、 W_{sx} は T_s の変化によらず一定な値を示し、 T_s の増加に伴い、 σ_{smax} は大きく減少する。

L の増加によって W_{sx} は単調に増加し、 σ_{smax} は大きく急激に減少した後、大きく増加する。一方、H の増加によって、 W_{sx} は大きく減少し、 σ_{smax} は僅か減少した後、増加する。

(3) E_x は、 T_{k1} 、 T_s 、 E_{k1x} 、 E_{sb} の増加に伴い大きく、あるいは、L の増加に伴い緩やかに増加し、 E_x は H の増加に伴い大きく減少する。 T_{k1} の増加に伴い、 E_z は増加した後、ほぼ一定な値を示す。 E_z は T_s 、H、 E_{sb} の増加に伴い大きく増加し、L の増加に伴い大きく減少する。そして、 E_z は E_{k1x} の増加によって殆ど増加しない。

(4) T_{k1} の増加に伴って、 δ_x 、 δ_z は大きく減少する。 T_s 、 E_{sb} の増加に伴い、 δ_x は増加した後、減少し、 δ_z は単調に減少する。 δ_x 、 δ_z は、L の増加に伴って大きく増加し、H の増加に伴い、 δ_x は大きく増加し、 δ_z は大きく減少する。 E_{k1x} の増加に伴って、 δ_x 、 δ_z は減少する。

(5) T_{k1} の増加に伴い、 ν_{xz} は少し増加した後、緩やかに減少し、 T_s 、H、 E_{sb} の増加に伴い増加する。ただし、H、 E_{sb} の増加に伴って、一定値に近づくように ν_{xz} が増加するのに対し、 T_s に対しては ν_{xz} の増加が加速の傾向を示す。L、 E_{k1x} の増加に伴い、 ν_{xz} は大きくあるいは緩やかに減少する。

(6) KL 最大の曲げ応力 σ_{kmax} 、曲げたわみ δ_{k1z} は T_{k1} の増加に伴い大きく減少し、零に近づく。 E_{k1x} の増加によって σ_{kmax} は大きく減少し、零に近づく。

以上のように、本論文は、段ボールの形態、素材特性を考慮し、段ボールの厚さ方向の応力ならびにその弾性パラメータを議論したものである。したがって、本表示は、両面段ボ

ールの厚さ方向の応力、ひずみ状況の議論に役立つものと考えられる。

<参考文献>

- 1) 松島成夫、奥田隆宏、宮内 治、野沢光治：紙パ技協誌、**36**(3)，377-387(1982)。
- 2) 松島 理、松島成夫：紙パ技協誌、**54**(2)，260-269(2000)。
- 3) 松島 理、松島成夫：紙パ技協誌、**54**(7)，986-995(2000)。
- 4) 松島 理、松島成夫：紙パ技協誌、**51**(4)，707-716(1997)。
- 5) 松島 理、松島成夫：日本包装学会誌、**5**(3)，211-221(1996)。
- 6) 松島 理、松島成夫：日本包装学会誌、**7**(4)，175-185(1996)。
- 7) 松島 理、松島成夫：日本包装学会誌、**8**(2)，55-65(1996)。
- 8) 松島成夫、矢野 忠、松島 晟：紙パ技協誌、**42**(5)，480-486(1988)。
- 9) 松島成夫、矢野 忠、松島 晟：紙パ技協誌、**42**(5)，480-486(1988)。
- 10) 松島成夫、矢野 忠、松島 晟：紙パ技協誌、**43**(6)，602-609(1989)。
- 11) 松島成夫、矢野 忠、松島 晟：紙パ技協誌、**44**(5)，605-613(1990)。
- 12) 林 毅：日本航空学会誌、**8**(79)，1131-1156(1941)。
- 13) 渋谷 巖：日本航空学会誌、**7**(61)，393-424(1940)。
- 14) 渋谷 巖：日本航空学会誌、**8**(71)，267-278(1941)。
- 15) Jones A. R. : Tappi, **51**(5)，203-209(1968)。
- 16) 紙パルプ協会：紙パルプの種類と試験法、

- 三好印刷、377-387(1966)：紙パルプの種類と試験法、新日本印刷、303-315(1995)。
- 17) Horio M. and Onogi S. : J. Appl. Phys. **22** (7), 971-976(1951).
- 18) 例えば、倉西正嗣：応用弾性学、共立出版、155-156(1966)。
- 19) 松島成夫、矢野 忠、松島 晟、横田俊昭：紙パ技協誌、**45**(4), 480-487(1991)；**46**(5), 668-678(1992)；**47**(4), 517-528(1993)；松島成夫、矢野 忠、松島 理：紙パ技協誌、**48**(4), 600-611(1994)；紙パ技協誌、**49**(6), 956-966(1995)。
- 20) 松島 理、松島成夫：日本機械学会論文集、**60**(576, A), 1814-1820(1994)；**61**(587, A), 1601-1607(1995)；**63**(611, A), 1525-1562(1997)；紙パ技協誌、**50**(9), 1299-1310(1996)；**50**(9), 1356-1365(1996)。
- 21) 例えば、清家清一郎：材料力学、共立出版、48-50(1978)。
- 22) 例えば、渥美 光、鈴木幸三、三ヶ田賢次：材料力学I、森北出版、101-102(1976)。
- 23) 例えば、白鳥英亮：材料の力学、朝倉書店、95-98(1973)。
- 24) 例えば、23) の p. 98-102.
- 25) 例えば、段ボール実用百科編集委員会：段ボール実用百科、一律書房、64-69(1970)。
- 26) 25) の p. 126-127.

(原稿受付 2001 年 9 月 23 日)

(審査受理 2001 年 12 月 26 日)